

"IMPLEMENTAÇÃO DO CÁLCULO DO FATOR DE CHOLESKY

DIRETAMENTE A PARTIR DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO ESTRUTURAL"

Carlos Leopoldo Martins Prates

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE  
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JA  
NEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS À OBTENÇÃO DO GRAU  
DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.).

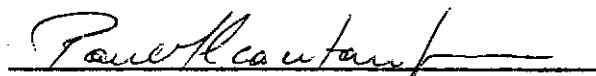
Aprovada por:



Prof. Humberto Lima Soriano  
(Presidente)



Prof. Fernando Venâncio Filho



Prof. Paulo Alcantara Gomes



Prof. Paulo Roberto Oliveira

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

FEVEREIRO DE 1979

PRATES, Carlos Leopoldo Martins

Implementação do Cálculo do Fator de Cholesky diretamente a Partir da Matriz de Rigid<sub>u</sub>dez do Elemento Estrutural. |Rio de Janeiro| 1979.

XI, 165p., 29,7cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1979).

TESE - Universidade Federal do Rio de Janeiro. COPPE/UFRJ

1. Estruturas. I. COPPE/UFRJ II. Título (Série).

A meus pais, meus avós e  
ã Lilian.

### AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. Humberto Lima Soriano, pelos valiosos conselhos e sugestões como orientador desta tese.
- Aos professores da Escola de Engenharia da UFMG, em especial ao Dr. Alcebíades Vasconcellos Filho e ao Prof. Estevão Pinto Rodrigues, pelos ensinamentos recebidos.
- Aos professores, coordenadores e diretor da COPPE/UFRJ, Dr. Paulo Alcantara Gomes, pela colaboração prestada na elaboração deste trabalho.
- À Comissão Nacional de Energia Nuclear (CNEN), pelo auxílio financeiro.
- Aos colegas, pela amizade recebida.
- Aos meus pais, por todo o incentivo, ajuda e dedicação com que me acompanharam.

RESUMO

Numa análise estática, podemos encontrar os deslocamentos, tensões e deformações de uma estrutura sujeita a quaisquer solicitações através da fatoração de sua matriz de rigidez. Um dos processos mais conhecidos é a decomposição numa matriz triangular superior, o fator de Cholesky.

Apresenta-se aqui um processo em que, através da fatoração da matriz de rigidez do elemento, obtém-se um fator representativo do sistema estrutural e, então, o fator de Cholesky. Os resultados obtidos através do programa de computador desenvolvido, mostraram a maior precisão deste processo e as vantagens de sua utilização em estruturas mal condicionadas.

As idéias básicas desta formulação foram desenvolvidas na Alemanha pelos autores do sistema ASKA. No presente trabalho, estudamos, programamos e sugerimos caminhos para aplicação deste processo. Implementamos o cálculo automático dos elementos de treliça, pórtico plano e elementos finitos triangulares para o estado plano.

ABSTRACT

In a static analysis the unknowns may be found by means of obtaining a factor of the stiffness matrix of the structure. The most popular solution method involves the transformation of this matrix into an upper triangular matrix, the Cholesky factor.

Here, it is shown how this factor may be obtained directly from the factor of the elemental stiffness matrix and a representative factor of the structural matrix. The results from the computers program which was developed for the new method have garanteed its precision and the advantage of employing it to solve ill-conditioned problems.

The basic ideas of this formulation were developed in Germany by other authors for the ASKA system. These ideas have been worked up here, an automatic program has been obtained for beam and triangular finite elements and some suggestions are given for the further development of the new method.

## ÍNDICE

INTRODUÇÃO .....	1
CAPÍTULO I - DESCRIÇÃO DO MÉTODO .....	6
1.1 - O MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS .....	6
1.2 - O FATOR NATURAL DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO ESTRUTURAL .....	12
1.3 - MONTAGEM DO FATOR NATURAL DA MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA .....	13
1.4 - OBTENÇÃO DO FATOR DE CHOLSKY .....	15
1.5 - CÁLCULO DAS INCÓGNITAS .....	16
1.6 - O PROBLEMA DO MAL CONDICIONAMENTO .....	18
1.6.a - OS ERROS NA ANÁLISE ESTRUTURAL POR COMPU TADORES .....	18
1.6.b - O ERRO NUMÉRICO .....	19
1.6.c - O MAL CONDICIONAMENTO E O NÚMERO DE CON- DICIONAMENTO .....	20
1.6.d - COMPARAÇÕES ENTRE O MÉTODO CLÁSSICO E O MÉTODO DO FATOR NATURAL .....	26
1.7 - OBSERVAÇÕES SOBRE A TÉCNICA DE SUBESTRUTURAS E ANÁLISE DINÂMICA .....	29
CAPÍTULO II - FATORAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO ES TRUTURAL .....	33
2.1 - FORMULAÇÃO EXPLÍCITA .....	33
2.1.a - TRELIÇA PLANA .....	33
2.1.b - TRELIÇA ESPACIAL .....	36
2.1.c - PÓRTICO PLANO .....	37
2.1.d - ELEMENTO FINITO TRIANGULAR PARA ESTADO PLANO, COM VARIAÇÃO LINEAR DOS DESLOCA MENTOS .....	41

2.2 - UTILIZAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE GAUSS NA FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO TRIANGULAR PARA ESTADO PLANO COM VARIAÇÃO QUADRÁTICA DOS DESLOCAMENTOS .....	45
CAPÍTULO III - O MÉTODO DE TRIANGULARIZAÇÃO POR TRANSFORMAÇÕES ORTOGONAIS .....	
3.1 - FORMULAÇÃO MATEMÁTICA .....	52
3.2 - O MÉTODO DE HOUSEHOLDER .....	56
3.3 - O MÉTODO DE GRAM-SCHMIDT .....	59
3.4 - COMPARAÇÕES, VANTAGENS E DESVANTAGENS .....	61
CAPÍTULO IV - AS TÉCNICAS DE ARMAZENAMENTO .....	
4.1 - MATRIZES NÃO SIMÉTRICAS .....	63
4.1.a - A BANDA VARIÁVEL .....	64
4.1.b - A TÉCNICA DE ESPARSIDADE .....	70
4.2 - A ALTURA EFETIVA DE COLUNA .....	72
CAPÍTULO V - IMPLEMENTAÇÃO DE PROGRAMA DE COMPUTADOR .....	
5.1 - DESCRIÇÃO GERAL .....	74
5.2 - AS SUBROTINAS .....	82
5.2.a - LEITURA, GERAÇÃO E ENTRADA DE DADOS ...	82
5.2.b - A MONTAGEM DO FATOR NATURAL DA MATRIZ DE RIGIDEZ .....	89
5.2.c - OBTENÇÃO DO FATOR DE CHOLESKY E CÁLCULO DOS DESLOCAMENTOS NODAIS .....	94
5.2.d - CÁLCULO E IMPRESSÃO DOS RESULTADOS (DESLOCAMENTOS, FORÇAS, DEFORMAÇÕES, TENSÕES E REAÇÕES) .....	96
5.2.e - O CÁLCULO DO NÚMERO DE CONDICIONAMENTO .....	97
5.3 - RESULTADOS E COMPARAÇÕES .....	100



5.3.a - EXEMPLOS EM GERAL .....	100
5.3.b - COMPARAÇÕES SOBRE A PRECISÃO .....	109
5.3.c - RESULTADOS DA APLICAÇÃO DAS TÉCNICAS DE ARMAZENAMENTO .....	124
5.3.d - CONSIDERAÇÕES SOBRE O TEMPO E GASTO DE MEMÓRIA .....	128
 CAPÍTULO VI - CONCLUSÕES .....	 133
 BIBLIOGRAFIA .....	 136
 APÊNDICE .....	 140

NOTAÇÕES

- $\underline{a}$  - matriz booleana que define as conexões cinemáticas entre os elementos finitos
- $\underline{A}$  - matriz de transformação do sistema natural para o sistema global
- $\underline{A}_i$  - matrizes que fornecem as relações entre os deslocamentos  $\underline{q}$  de cada elemento e os deslocamentos  $\underline{D}$  da estrutura
- $\underline{AR}$  - reações de apoio
- $\underline{B}$  - matriz que relaciona as deformações com os deslocamentos para os elementos
- $\underline{D}$  - matriz de deslocamentos globais do sistema
- $\underline{D}_p$  - deslocamentos prescritos
- $\underline{E}_i$  - matriz de elasticidade para o elemento
- $\underline{f}$  - vetor de forças nodais equivalentes atuantes no sistema
- $\underline{f}_i$  - campo de deslocamentos no interior do elemento
- $\underline{F}_i$  - fator natural da matriz de rigidez do elemento  $i$  (no sist.global)
- $\underline{\tilde{f}}$  - vetor de cargas atuantes diretamente nos pontos nodais
- $\underline{FI}$  - matriz de interpolação em coordenadas triangulares
- $\underline{f}_{mi}$  - forças de massa atuantes no elemento por unidade de volume
- $\underline{FS} = [\underline{F}_i]$  - matriz diagonal cujas submatrizes da diagonal são os fatores  $\underline{F}_i$
- $\underline{I}$  - matriz identidade
- $\underline{K}$  - matriz de rigidez estrutural
- $[\underline{k}]$  - matriz diagonal cujas submatrizes da diagonal são as matrizes  $\underline{k}_i$
- $\underline{k}_i$  - matriz de rigidez do elemento  $i$  no sistema global
- $\underline{k}_{Ni}$  - matriz de rigidez do elemento  $i$  no sistema natural
- $[\underline{k}_N]$  - matriz diagonal cujas submatrizes da diagonal são as matrizes  $\underline{k}_{Ni}$

$\ell = \sum_{i=1}^M \ell_i$  - ordem da matriz  $[k]$

$\ell_{0i}$  - número de movimentos de corpo rígido do elemento  $i$

$\ell_i = \ell_{0i} + \ell_{Ni}$  - número de graus de liberdade do elemento  $i$   
(dimensões da matriz  $k_i$ )

$\ell_{Ni} = \ell_i - \ell_{0i}$  - número de graus de liberdade naturais (do elemento na estrutura)

$M$  - número de elementos da estrutura

$\underline{M}$  - matriz de massa do sistema estrutural

$MM = \sum_{i=1}^M \ell_{Ni}$  - total de graus de liberdade dos elementos na estrutura

$m_i$  - matriz de massa do elemento  $i$

$N = ND - NR$  - número de graus de liberdade do sistema com  $NR$  vinculações

$N_i$  - matriz que define a natureza do campo de deslocamentos  $f_i$

$ND$  - dimensão da matriz  $K$ ; número de graus de liberdade do sistema sem vinculações

$NR$  - número de restrições (deslocamentos prescritos) impostas ao sistema

$p$  - precisão do computador; número de dígitos com que se representa o número usando o ponto flutuante

$\underline{P}$  - matriz ortogonal

$\underline{q}$  - vetor de todos os deslocamentos  $q_i$  no sistema local

$\underline{Q}$  - matriz ortogonal

$\underline{Q}_e$  - vetor de forças nodais equivalentes no sistema local

$\underline{q}_i$  - vetor de deslocamentos nodais do elemento  $i$

$\underline{R}^* = \begin{bmatrix} \underline{U} \\ \dots \\ \underline{O} \end{bmatrix}$  - matriz retangular ( $MM \times N$ ) obtida no método QR

$[\underline{R}]$  - matriz de transformação diagonal, cujas submatrizes da diagonal são as  $\underline{R}_i$

$\underline{RES}$  - vetor que armazena os resíduos devido ao erro

$\underline{R}_i$  - matriz de transformação do elemento

$\underline{S}$  - fator natural da matriz de rigidez  $\underline{K}$  (correspondente às direções livres)

$\underline{T}_e$  - trabalho realizado pelas forças externas

$\underline{T}_i$  - trabalho realizado pelas forças internas

$\underline{U}$  - matriz triangular superior; fator de Cholesky

$\underline{\varepsilon}_i$  - matriz de deformações do elemento  $i$

$\phi_i$  - forças de superfície atuantes no elemento por unidade de área e função de interpolação

$\lambda_i$  - autovalor  $i$

$\Pi_p$  - energia potencial acumulada no sistema estrutural

$\Pi_{pi}$  - energia potencial acumulada no elemento

$\underline{\sigma}_{0i}$  - vetor de tensões iniciais no elemento

$[ \ ]^{\sim}$  - matriz diagonal

$C(\underline{X})$  - número de condicionamento de uma matriz

$|| \quad ||$  - norma de uma matriz

$\underline{X}^T$  - matriz transposta de  $\underline{X}$

## INTRODUÇÃO

A existência dos computadores permite que se faça atualmente a análise de estruturas através dos métodos numéricos. A formulação matricial do método da rigidez ou dos deslocamentos possibilita o cálculo de estruturas reticuladas com elevado número de incógnitas. A teoria dos elementos finitos é aplicável às mais diversas estruturas através da discretização desta em elementos de características variadas. Com isto cada vez mais, torna-se possível analisar, com a aproximação requerida, o comportamento de estruturas de quaisquer formas, sujeitas a quaisquer solicitações.

De maneira geral, obtém-se a matriz de rigidez da estrutura através da soma das contribuições de cada elemento sobre cada incógnita nodal. Com esta matriz, numa análise estática, podemos então encontrar os deslocamentos, tensões e deformações em qualquer ponto da estrutura (eq. 1). A resolução do sistema de equações pelos métodos diretos é feita através da fatoração da matriz de rigidez. O método de eliminação de Gauss baseia-se na possibilidade de decompor esta matriz no produto de uma triangular inferior por uma triangular superior. Em geral, as matrizes estruturais têm a característica de simetria e positividade. Neste caso, a aplicação do método de Gauss pode ser simplificada e podemos utilizar também o método de Cholesky. Neste, a matriz triangular inferior é a transposta da matriz trian-

gular superior. A esta última chamamos de fator de Cholesky (Ver eq. 2).

A transformação da matriz de rigidez numa matriz triangular é a etapa crítica da resolução do problema. Conseguindo isto, o vetor de incógnitas é obtido através de substituições sucessivas.

$$\underline{K} \cdot \underline{D} = \underline{F} \quad (1)$$

$$\underline{K}_{nn} = \underline{U}^t \cdot \underline{U} \quad (2)$$

$\underline{K}$  = matriz de rigidez da estrutura

$\underline{D}$  = vetor de deslocamentos nodais

$\underline{F}$  = vetor de forças nodais equivalentes

$\underline{U}$  = fator de Cholesky

$\underline{K}_{nn}$  = matriz de rigidez correspondente aos deslocamentos livres do sistema vinculado

O presente trabalho, baseado nas pesquisas feitas recentemente na Alemanha pelos autores do sistema ASKA (Automated System for Kinematic Analysis), visa estudar, desenvolver e implementar um método de obtenção do fator de Cholesky diretamente a partir da matriz de rigidez do elemento estrutural. Ou seja, ao invés de fazer uma somação de contribuições de cada elemento com a subsequente fatoração da matriz assim obtida, porque não fatorar a matriz de rigidez do elemento e obter um fator representativo do sistema estrutural?

A idéia é atrativa, uma vez que diminui bastante os erros de truncamento que aparecem no processo de fatoração de

Gauss ou de Cholesky devido ao mal condicionamento das matrizes estruturais em diversos problemas. Assim, torna-se mais econômico fazer análises pela possibilidade de usar precisão simples mesmo em computadores com pequeno comprimento de palavra (poucos dígitos). Com isso, o processo é indicado também para o cálculo dos autovalores e autovetores em análise dinâmica. Publicações recentes garantem bons resultados em relação à sua aplicação à análise não linear.

Algumas dificuldades são encontradas na implementação do método do fator natural. A fatoração da matriz de rigidez do elemento estrutural, o método de transformação por matrizes ortogonais, o armazenamento e processamento no computador são problemas que exigem novas considerações, diferentes daquelas empregadas no método clássico, exigindo o aperfeiçoamento de cada um deles. A bibliografia disponível ainda é pequena e omissa.

No primeiro capítulo é exposta a formulação básica do método dos deslocamentos apenas com o intuito de facilitar a compreensão e desenvolvimento do método do fator natural que é descrito em seguida. Expõe-se a teoria, sendo que os algoritmos, explicações mais detalhadas, exemplos, resultados e comparações são encontrados nos capítulos seguintes, separadamente. Ainda no primeiro capítulo é feita uma revisão da literatura existente sobre o problema do mal condicionamento em análise matricial de estruturas. O estudo deste assunto se torna necessário a quem quer que se interesse pelo problema de precisão dos resultados obtidos numa análise numérica. No final deste capítulo, faz-se também uma breve exposição sobre a aplicação da técnica de subestru-

turas e de análise dinâmica ao método do fator natural. Entretanto, nenhuma delas chegou a ser introduzida no programa de computador.

O Capítulo II trata da fatoração da matriz de rigidez do elemento estrutural. Este é o primeiro passo necessário para a aplicação do novo método. Apresentam-se aqui apenas os casos mais simples em que o fator natural pode ser formulado explicitamente ou através da integração de Gauss.

No Capítulo III, são estudados os métodos de transformações ortogonais de Householder e de Gram-Schmidt, necessários para a obtenção do fator de Cholesky a partir do fator da matriz de rigidez da estrutura. Apresentam-se aqui os conceitos iniciais sobre as transformações ortogonais, os algoritmos e alguns resultados da programação de tais métodos.

O Capítulo IV foi dedicado à apresentação das técnicas de armazenamento computacional de matrizes. Pela não simetria do fator natural da estrutura, técnicas de armazenamento em banda e através dos apontadores dos coeficientes não nulos foram utilizadas.

A passagem da teoria para a prática é o objetivo do desenvolvimento de uma programação automática. A utilização das subrotinas, manual de entrada de dados do programa, vantagens e desvantagens dos métodos empregados, exemplos didáticos e resultados obtidos através do programa são apresentados e discutidos no Capítulo V, permitindo-nos tirar conclusões sobre o presente trabalho.



A análise dinâmica através deste novo método não chegou a ser aqui desenvolvida. A idéia básica de conseguir um método mais preciso e, ao mesmo tempo, mais rápido para a análise de estruturas fica longe de ser atingida de maneira geral, mas chega-se a algumas conclusões a respeito de sua aplicabilidade a casos específicos. A otimização de cada um dos itens aqui estudados poderá torná-lo um método realmente útil.

## CAPÍTULO I

### DESCRIÇÃO DO MÉTODO

São apresentados os resultados das pesquisas feitas, especialmente nas referências [1], [2] e [3], expondo-se aqui a base teórica do método. Os mesmos itens voltarão a ser analisados separadamente, sob o ponto de vista de aplicação na prática, nos capítulos subsequentes.

#### 1.1 - O MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS

Na referência [4] estuda-se o método dos deslocamentos aplicado às estruturas reticuladas. Um estudo mais profundo do método é fundamental para sua aplicação a estruturas discretizadas em elementos finitos [5], [6], [7], [8].

Supõe-se que os deslocamentos  $\underline{f}_i$  e as deformações  $\underline{\varepsilon}_i$  de um ponto arbitrário no elemento são dados pelas equações abaixo:

$$\underline{f}_i = \{u_i \ v_i \ w_i\}^T = \underline{N}_i \cdot \underline{q}_i \quad (1.1)$$

$$\underline{\varepsilon}_i = \underline{B}_i \cdot \underline{q}_i \quad (1.2)$$

onde  $\underline{N}_i$  é a matriz que define a natureza do campo de deslocamentos,  $\underline{q}_i$  são os deslocamentos nodais do elemento  $i$  e  $\underline{B}_i$  é a matriz que relaciona as deformações com os deslocamentos nodais

para cada elemento.

Através da introdução destas funções na expressão do funcional relativo à energia potencial, obtém-se a energia potencial total para um elemento ( $\Pi_{pi}$ ):

$$\begin{aligned} \Pi_{pi} = & \int_{vol_i} \left( \frac{1}{2} \cdot \underline{\varepsilon}_i^T \cdot \underline{E}_i \cdot \underline{\varepsilon}_i + \underline{\varepsilon}_i^T \cdot \underline{\sigma}_{0i} \right) dv_i - \int_{vol_i} \underline{f}_i^T \cdot \underline{f}_{mi} dv_i - \\ & - \int_{sup_i} \underline{f}_i^T \cdot \underline{\phi}_i ds_i \quad (1.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{pi} = & \frac{1}{2} \cdot \underline{q}_i^T \left( \int_{vol_i} \underline{B}_i^T \cdot \underline{E}_i \cdot \underline{B}_i dv_i \right) \cdot \underline{q}_i + \underline{q}_i^T \int_{vol_i} \underline{B}_i^T \cdot \underline{\sigma}_{0i} dv_i - \\ & - \underline{q}_i^T \int_{vol_i} \underline{N}_i^T \cdot \underline{f}_{mi} dv_i - \underline{q}_i^T \int_{sup_i} \underline{N}_i^T \cdot \underline{\phi}_i ds_i \quad (1.4) \end{aligned}$$

onde  $\underline{E}_i$  é a matriz de elasticidade,  $\underline{\sigma}_{0i}$  são as tensões iniciais,  $\underline{f}_{mi}$  são as forças de massa,  $\underline{\phi}_i$  são as forças de superfície e o índice indica que estamos nos referindo ao elemento.

Para analisar a estrutura total temos que somar os potenciais  $\Pi_{pi}$  dos diversos elementos e considerar as cargas  $\underline{F}$  aplicadas diretamente nos pontos nodais.

$$\Pi_p = \left( \sum_{i=1}^M \Pi_{pi} \right) - \underline{D}^T \cdot \underline{\tilde{F}} \quad (1.5)$$

onde  $M$  é o número de elementos da estrutura e  $\underline{D}$  são deslocamentos no sistema global.

A condição de equilíbrio será dada pela equação

abaixo, obtida através da minimização da energia total, correspondente à resolução de um sistema da forma (1):

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \underline{D}} = 0 \quad (1.6)$$

Podemos também estabelecer as condições de equilíbrio através do princípio dos trabalhos virtuais, como será visto mais adiante. A integral da forma (1.7) é a matriz de rigidez do elemento  $\underline{k}_{Ni} (\underline{\ell}_{Ni} \times \underline{\ell}_{Ni})$  no sistema natural. Para obtermos esta matriz no sistema global é necessário utilizar as matrizes de transformação:

$$\underline{k}_{Ni} = \int_{vol_i} \underline{B}_i^T \cdot \underline{E}_i \cdot \underline{B}_i \, dv_i \quad (1.7)$$

A matriz  $\underline{k}_{Ni}$  relaciona as forças nodais generalizadas  $\underline{Q}_i$  com os deslocamentos nodais associados  $\underline{q}_i$  (1.8) para o elemento  $i$ .

$$\underline{Q}_i = \underline{k}_{Ni} \cdot \underline{q}_i \quad (1.8)$$

sendo:

$$\underline{Q}_i = \underline{\tilde{F}}_i - \int_{vol_i} \underline{B}_i^T \cdot \underline{\sigma}_{0i} \, dv_i + \int_{vol_i} \underline{N}_i^T \cdot \underline{f}_{mi} \, dv_i + \int_{sup_i} \underline{N}_i^T \cdot \underline{\phi}_i \, ds_i \quad (1.9)$$

$$\underline{Q} = \{ \underline{Q}_1 \quad \underline{Q}_2 \quad \dots \quad \underline{Q}_n \} \quad (1.10)$$

$$\underline{q} = \{ \underline{q}_1 \quad \underline{q}_2 \quad \dots \quad \underline{q}_n \} \quad (1.11)$$

$$[\underline{k}_N] = [ \underline{k}_{N1} \quad \underline{k}_{N2} \quad \dots \quad \underline{k}_{NM} ] \quad (1.12)$$

Os deslocamentos nodais  $\underline{g}_i$  do elemento  $i$  podem ser transformados em deslocamentos nodais no sistema de coordenadas globais (vetor  $\underline{D}$ ) (eq. 1.13), através da matriz de transformação  $\underline{A}_i$  (eq. 1.14), onde  $\underline{R}$  é a matriz de transformação dos deslocamentos (e forças) no sistema local (do elemento) em relação à referência global e  $\underline{a}$  (matriz topológica) faz a correspondência entre os deslocamentos do elemento ( $\underline{g}_i$ ) e suas numerações globais  $\underline{D}$ . Quando os sistemas global e local são os mesmos, a matriz de rotação é a matriz identidade e, neste caso, a matriz  $\underline{A}$  é simplesmente a matriz topológica.

$$\underline{g}_i = \underline{A}_i \cdot \underline{D} \quad (1.13)$$

$$\underline{A} = [\underline{R}] \cdot \underline{a} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \dots \\ A_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & \cdot & a_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ R_M & \cdot & a_n \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

De (1.11), (1.13) e (1.14), temos:

$$\underline{g} = \underline{A} \cdot \underline{D} \quad (1.15)$$

Levando (1.13) em (1.8), vem:

$$\underline{Q}_i = \underline{k}_{Ni} \cdot \underline{A}_i \cdot \underline{D} \quad (1.16)$$

De (1.10), (1.11), (1.12), (1.14) e (1.16), vem:

$$\underline{Q} = [\underline{k}_N] \cdot \underline{A} \cdot \underline{D} \quad (1.17)$$

Aplicamos agora o princípio dos trabalhos virtuais, igualando o trabalho realizado pelas forças internas  $T_i$

(eq. 1.18) ao trabalho realizado pelas forças externas  $T_e$  (eq. 1.19), obtendo a relação (1.20). (Obs.: o hífen sobre as notações indica que se trata de deslocamentos, deformações, etc, virtuais).

$$T_i = \sum_{i=1}^M \int_{vol_i} \tilde{\varepsilon}_i^T \cdot \tilde{\sigma}_i \, dv_i = \sum_{i=1}^M \tilde{q}_i^T \cdot Q_i = \tilde{q}^T \cdot Q = \tilde{D}^T \cdot A^T \cdot Q \quad (1.18)$$

$$T_e = \tilde{D}^T \cdot F \quad (1.19)$$

$$\tilde{D}^T \cdot A^T : Q = \tilde{D}^T \cdot F \quad (1.20)$$

de onde vem:

$$F = A^T \cdot Q \quad (1.21)$$

sendo  $F$  o vetor de forças generalizadas atuantes na estrutura. Levando (1.21) em (1.17), temos finalmente a equação geral do método dos deslocamentos (1):

$$F = A^T \cdot [k_N] \cdot A \cdot D = a^t \cdot R^t [k_N] \cdot R \cdot a \cdot D = a^t \cdot [k] \cdot a \cdot D \quad (1.22)$$

$$F_{ND \times 1} = K_{ND \times ND} \cdot D_{ND \times 1} \quad [\text{Eq. (1) da introdução}]$$

onde  $K$  é singular, sendo portanto necessário vincular o sistema estrutural anulando um certo número de deslocamentos  $D$ . Podemos escrever, usando (1.14) e (1.22):

$$K = A^T \cdot [k_N] \cdot A = \sum_{i=1}^M R_i^T \cdot k_{Ni} \cdot R_i = \sum_{i=1}^M k_i \quad (1.23)$$

Na realidade, a instituição das matrizes  $K$  e  $F$  efetua-se pela soma dos elementos das parcelas referentes a cada

elemento estrutural às posições de  $\underline{K}$  e  $\underline{F}$ . Praticamente não é necessário instituir as matrizes  $\underline{a}_i$ . Basta indicar para o elemento genérico, na numeração do sistema, os números dos nós que o especificam na ordem em que estes nós aparecem na definição das matrizes  $\underline{k}_i$  e  $\underline{Q}_i$ .

Para resolver a equação (1) consideramos o vetor  $\underline{D}$  com a seguinte partição:

$$\underline{D}_{ND \times 1} = \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{matrix} N \\ \underline{D}_n \end{matrix} & \begin{matrix} NR \\ \underline{D}_p \end{matrix} \end{array} \right\} \quad (1.24)$$

sendo  $\underline{D}_p$  os deslocamentos prescritos. Podemos desta maneira, escrever (1) da forma abaixo:

$$\begin{array}{c} N \\ NR \end{array} \left[ \begin{array}{c|c} \begin{matrix} N \\ \underline{K}_{nn} \end{matrix} & \begin{matrix} NR \\ \underline{K}_{np} \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} NR \\ \underline{K}_{pn} \end{matrix} & \begin{matrix} NR \\ \underline{K}_{pp} \end{matrix} \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c} \underline{D}_n \\ \underline{D}_p \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \underline{F}_n \\ \underline{F}_p \end{array} \right] \begin{array}{c} N \\ NR \end{array} \quad (1.25)$$

sendo  $\underline{K}_{nn}$  a matriz de rigidez não singular do sistema vinculado e  $\underline{F}_p$  a matriz das reações de apoio.

Resolvemos então (1) encontrando os  $\underline{D}_n$  deslocamentos nodais livres do sistema e as reações de apoio  $\underline{F}_p$ :

$$\underline{D}_{n_{Nx1}} = \underline{K}_{nn_{NxN}}^{-1} (\underline{F}_{n_{Nx1}} - \underline{K}_{np_{NxNR}} \cdot \underline{D}_{p_{NRx1}}) \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} \underline{F}_{p_{NRx1}} = & \underline{K}_{pn_{NRxN}} \cdot \underline{K}_{nn_{NxN}}^{-1} (\underline{F}_{n_{Nx1}} - \underline{K}_{np_{NxNR}} \cdot \underline{D}_{p_{NRx1}}) + \underline{K}_{pp_{NRxNR}} \cdot \\ & \cdot \underline{D}_{p_{NRx1}} \end{aligned} \quad (1.27)$$

Estas equações fornecem a solução completa do sistema. Dado um sistema estrutural cujas características elásticas e geométricas são representadas pela matriz  $\underline{K}$  e cujas solicita-

ções são representadas pela matriz  $\underline{\tilde{F}}$  (cargas aplicadas nos nós, nos elementos, efeitos de temperatura e tensões iniciais) e  $\underline{\tilde{D}}_p$  deslocamentos prescritos (nulos ou recalques de apoio), os deslocamentos nodais  $\underline{\tilde{D}}_n$  são dados por (1.26) e as reações de apoio  $\underline{\tilde{F}}_p$  por (1.27). Com (1.13) e (1.8) os deslocamentos e forças nodais no elemento  $i$  podem ser então calculados.

## 1.2 - O FATOR NATURAL DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO ESTRUTURAL

Podemos sempre decompor a matriz de rigidez do elemento estrutural,  $\underline{k}_i$  ( $\ell_i \times \ell_i$ ) (eq. 1.7), de acordo com a equação abaixo, no produto de fatores  $\underline{\tilde{F}}_i$  (fator natural da matriz de rigidez do elemento), como será exposto no Capítulo II.

$$\underline{k}_i = \underline{\tilde{F}}_i^T \cdot \underline{\tilde{F}}_i \quad (1.28)$$

As dimensões do fator  $\underline{\tilde{F}}_i$  são  $\ell_{Ni}$ , número de graus de liberdade do elemento na estrutura ( $= \ell_i - \ell_{0i}$  = número de graus de liberdade do elemento menos o número de movimentos de corpo rígido para o mesmo elemento  $i$ ), por  $\ell_i$ .

Podemos formar então uma matriz diagonal  $\underline{\tilde{F}}S$  ( $MM \times \ell$ ) cujas submatrizes da diagonal são os fatores  $\underline{\tilde{F}}_i$ .

$$[\underline{\tilde{F}}S] = \begin{bmatrix} \underline{\tilde{F}}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{\tilde{F}}_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \underline{\tilde{F}}_M \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

Esta matriz equivale neste método a  $[\underline{k}]$  do método clássico (1.12). Temos a seguinte relação entre elas:

$$[\underline{k}] = [\underline{\tilde{F}}S]^T \cdot [\underline{\tilde{F}}S] \quad (1.30)$$



### 1.3 - MONTAGEM DO FATOR NATURAL DA MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA

Existem infinitas matrizes  $\underline{S}^T$  (MMxND) satisfazendo (1.31):

$$\underline{S}^T_{ND \times MM} \cdot \underline{S}_{MM \times ND} = \underline{K}_{ND \times ND} \quad (1.31)$$

Substituindo as equações (1.23) e (1.30) em (1.31), vem:

$$\underline{S}^T \cdot \underline{S} = \underline{a}^T \cdot [\underline{k}] \cdot \underline{a} = \underline{a}^T \cdot [\underline{FS}] \cdot [\underline{FS}] \cdot \underline{a} \quad (1.32)$$

Portanto, uma das soluções para  $\underline{S}^T$  é dada pela equação abaixo:

$$\underline{S}^T = [\underline{FS}] \cdot \underline{a} \quad (1.33)$$

Assim como no método clássico, temos que considerar aqui também as vinculações do sistema estrutural para que possamos resolver o sistema de equações. A equação (1.31) pode ser reescrita com as seguintes partições:

$$\begin{bmatrix} \begin{matrix} N & NR \\ \underline{K}_{nn} & \vdots & \underline{K}_{np} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{K}_{pn} & \vdots & \underline{K}_{pp} \end{matrix} \end{bmatrix} \begin{matrix} N \\ NR \end{matrix} = \begin{bmatrix} \underline{S}^t \\ \vdots \\ \underline{S}_p^t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N & NR \\ \underline{S} & \vdots \\ \vdots & \underline{S}_p \end{bmatrix} \begin{matrix} MM \\ \end{matrix} = \begin{bmatrix} \underline{S}^t \cdot \underline{S} & \vdots & \underline{S}^t \cdot \underline{S}_p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{S}_p^t \cdot \underline{S} & \vdots & \underline{S}_p^t \cdot \underline{S}_p \end{bmatrix} \begin{matrix} N \\ NR \end{matrix} \quad (1.34)$$

$$\underline{S}^t \cdot \underline{S} = \underline{K}_{nn} \quad (1.35)$$

onde  $n$  corresponde aos deslocamentos nodais livres e  $p$  aos deslocamentos nodais prescritos. Um caso especial da decomposição (1.35) aparece quando  $\underline{S}$  é uma matriz quadrada (MM=N). Temos então a fatoração de Cholesky da forma (2).

Como a matriz  $\underline{a}$  tem apenas um algarismo unitário

rio por linha, ela não precisa ser montada na forma retangular. Um vetor em que cada posição contenha o número do grau de liberdade da estrutura correspondente àquele coeficiente do elemento estrutural será o necessário. No programa desenvolvido, montamos apenas a matriz  $\underline{S}$  (correspondente às direções livres). As listas de incidências ( $\underline{NOP}$ ), restrições nodais e restrições acumuladas ( $\underline{RL}$  e  $\underline{CRL}$ ) são suficientes para isto.

A submatriz  $\underline{S}_p$  serve para determinar as reações de apoio, como exemplificado no item (5.3.a). Entretanto, no programa, este cálculo é feito através do equilíbrio dos pontos nodais. Assim, uma vez obtidos os fatores naturais dos elementos (1.28) (no sistema global), a montagem da matriz  $\underline{S}$  é imediata (usando  $\underline{NOP}$ ,  $\underline{RL}$  e  $\underline{CRL}$  ao invés de  $\underline{a}$ ), não sendo efetuada nenhuma operação para tal.  $\underline{S}$  é o fator natural da matriz de rigidez do sistema.

A matriz  $\underline{S}$  tem  $MM$  linhas ( $MM = \sum_{i=1}^M l_{Ni}$ ) e  $N_n$  colunas. A Tabela (1.1) apresenta o valor de  $l_i$ ,  $l_{0i}$  e  $l_{Ni}$  para alguns elementos estruturais.

ELEMENTO	$l_i$	$l_{0i}$	$l_{Ni}$
Treliça Plana	4	3	1
Treliça Espacial	6	5	1
Pórtico Plano	6	3	3
Pórtico Espacial	12	6	6
El.Fin.Triang.CST	6	3	3
El.Fin.Triang.LST	12	3	9

Tabela 1.1

Assim, para treliças planas (e espaciais) a cada linha da matriz  $\underline{S}$  corresponderá um elemento da estrutura. Em cada linha haverá, portanto, no máximo 4 (e 6) coeficientes não nulos, correspondentes aos graus de liberdade dos elementos de treliça plana (e espacial). Portanto, a matriz  $\underline{S}$ , não simétrica, terá uma esparsidade elevada.

A montagem propriamente dita e os problemas de armazenamento computacional desta matriz são apresentados no Capítulo V.

#### 1.4 - OBTENÇÃO DO FATOR DE CHOLSKY

O fator de Cholesky poderá ser obtido, nesse método, diretamente a partir da matriz  $\underline{S}$ , através de transformações ortogonais (método QR).

$$\underline{S}_{MM \times N} = \underline{Q}_{MM \times MM} \cdot \underline{R}_{MM \times N}^* = \underline{Q} \cdot \begin{bmatrix} N \\ \underline{U}_S \\ \dots\dots\dots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} N \\ MM-N \end{matrix} \quad (1.36)$$

A matriz  $\underline{Q}$  representa o produto de matrizes de transformação ortogonais obtidas nos processos de triangularização de Householder, Givens ou Gram-Schmidt e  $\underline{U}_S$  uma matriz triangular superior de ordem  $N$ . Para uma matriz  $\underline{A}$ , não singular, as transformações ortogonais são tais que  $\underline{Q}$  e  $\underline{U}$  são únicas, desde que se arbitrem como positivos os elementos da diagonal principal da matriz  $\underline{U}$  [12].

$$\underline{Q}^T \cdot \underline{A} = \underline{U} \quad (1.37)$$

$$\underline{Q} \cdot \underline{Q}^T \cdot \underline{A} = \underline{Q} \cdot \underline{U}$$

$$\underline{A} = \underline{Q} \cdot \underline{U}$$

Como a matriz  $\underline{K}_{nn}$  é positiva definida, a sua decomposição é única. Por isto, substituindo (1.36) em (1.35), chegamos à equação abaixo, onde  $\underline{U}_s = \underline{U}$ .

$$\underline{K}_{nn} = \underline{S}^t \cdot \underline{S} = \begin{bmatrix} \underline{U}_s^t & \vdots & 0 \end{bmatrix} \underline{Q}^t \cdot \underline{Q} \begin{bmatrix} \underline{U} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{U}_s^t \cdot \underline{U} = \underline{U}^t \cdot \underline{U} \quad (1.38)$$

No Capítulo III são apresentados os métodos ortogonais, com a formulação matemática, algoritmos e comparações. A programação e os resultados são apresentados no Capítulo V.

### 1.5 - CÁLCULO DAS INCÓGNITAS

A resolução do sistema de equações da forma (1) pode agora ser facilmente obtida a partir da matriz triangular superior  $\underline{U}$ . A equação (1.26) pode ser reescrita como:

$$\underline{D}_{n \times 1} = [\underline{U}^t \cdot \underline{U}]^{-1} \cdot (\underline{F}_n - \underline{S}^t \cdot \underline{S}_p \cdot \underline{D}_p) \quad (1.39)$$

A equação acima é resolvida em duas etapas consecutivas:

#### 1ª etapa - Substituição para a frente

Trata-se de resolver a equação (1.40) através

de substituições sucessivas de acordo com o algoritmo (1.41).

Consideramos, no nosso trabalho,  $\underline{D}_p = \underline{0}$ .

$$\underline{U}^T \cdot \underline{Y} = \underline{F}_n \quad (1.40)$$

$$\text{Para } \left\{ \begin{matrix} i=1 \rightarrow N \\ j=1 \rightarrow C \end{matrix} \right\} \quad y_{ij} = (f_{ij} - \sum_{\ell=1}^{i-1} u_{\ell i} \cdot y_{\ell j}) / u_{ii} \quad (1.41)$$

onde  $C$  é o número de casos de carregamento. Assim,  $\underline{F}_n$  pode ser uma matriz retangular em que cada coluna representa um caso de carregamento. Tanto  $\underline{U}$  quanto  $\underline{Y}$  em (1.40) são processados por coluna. Supondo que armazenamos  $\underline{U}$  por colunas, teremos agora um cálculo eficiente de  $\underline{Y}_{N \times C}$  por colunas.

## 2ª etapa - Retrosubstituição

Conseguiremos finalmente a matriz dos deslocamentos  $\underline{D}_n$  fazendo substituições sucessivas em (1.42) de acordo com o algoritmo (1.43).

$$\underline{U} \cdot \underline{D}_n = \underline{Y} \quad (1.42)$$

$$\text{Para } \left\{ \begin{matrix} i=N+1 \\ j=1 \rightarrow C \end{matrix} \right\} \quad d_{ij} = (y_{ij} - \sum_{\ell=i+1}^N u_{i\ell} \cdot d_{\ell j}) / u_{ii} \quad (1.43)$$

No computador, a matriz  $\underline{Y}$ , e depois a matriz  $\underline{D}_n$ , poderão ocupar a mesma área anteriormente ocupada por  $\underline{F}_n$ . Apesar de que, nesta etapa, o "DO" mais interno processa  $\underline{U}$  segundo as linhas, o processamento e armazenamento de  $\underline{U}$  por colunas é feito de forma eficiente [27].

Uma vez conhecidos os deslocamentos nas extremidades dos elementos, podemos determinar os esforços atuantes so

bre os mesmos, as tensões e as reações de apoio da estrutura.

## 1.6 - O PROBLEMA DO MAL CONDICIONAMENTO

Tem-se por objetivo estudar as causas dos erros num programa de computador, sendo de especial interesse os erros numéricos causados pelo truncamento inicial que podem gerar, em matrizes mal condicionadas, dificuldades na resolução de problemas estruturais (estáticos, dinâmicos, lineares e não lineares). Fazemos aqui comparações entre o método clássico e o método do fator natural, buscando a melhor compreensão dos resultados obtidos no item (5.3.b). As referências básicas para este item foram [9], [10], [11], [12], [13] e [6].

### 1.6.a - OS ERROS NA ANÁLISE ESTRUTURAL POR COMPUTADORES

Na análise de estruturas em que se faz uso de um programa de computador, os erros podem ter as seguintes causas:

- um mau uso do programa ou dados errados;
- uma discretização mal feita dos elementos estruturais;
- erros numéricos no cálculo computacional .

Os erros numéricos, descritos no item seguinte, serão agravados pela má escolha da forma e tamanho dos elementos estruturais, assim como pelas relações extremas entre as dimensões dos lados dos elementos, por elementos distorcidos, malhas não uniformes, estruturas com elementos adjacentes de rigidez am

plamente variável, um grande número de graus de liberdade.

### 1.6.b - O ERRO NUMÉRICO

O erro numérico pode ter as seguintes fontes:

- Erros decorrentes dos dados originais mal definidos. Por exemplo, dados que não contenham mais que 2 ou 3 algarismos significativos.

- Erros de arredondamento. A representação dos números reais no computador não é exata porque o conjunto dos números nele operados não tem as propriedades do conjunto real. Assim, o conjunto dos números do computador é finito, limitado e não denso ; não tem a propriedade de fechamento nem a de associatividade na adição ou na multiplicação; não tem um único elemento nulo [9] . Os coeficientes reais das matrizes estruturais são arredondados.

O erro deste tipo poderá ser medido se, por exemplo, montarmos a matriz de rigidez e a de carregamentos em precisão simples, encontrarmos a solução do sistema de equações em precisão dupla e calcularmos a diferença dos resultados assim obtidos para os resultados da solução em precisão simples do computador. Pelo caráter aleatório de tal tipo de erro, seus limites máximos têm pequena possibilidade de serem atingidos.

- Erro de truncamento inicial - Este é o tipo de erro que nos interessa mais de perto neste trabalho. De acordo com a referência [9], matrizes de ordem  $n$  , simétricas, que tenham autovalores distintos podem ser representadas como uma combinação li-

near de matrizes de posto 1 :

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \underline{v}_i \cdot \underline{u}_i^T & \text{com } \underline{v}_i^T \cdot \underline{u}_i &= 1 \\ \underline{A}^{-1} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \cdot \underline{v}_i \cdot \underline{u}_i^T & \text{e } i &= 1, \dots, n \end{aligned} \quad (1.44)$$

sendo  $\lambda_i$  o  $i$ -ésimo autovalor,  $\underline{v}_i$  o  $i$ -ésimo autovetor de  $\underline{A}$  e  $\underline{u}_i$  o  $i$ -ésimo autovetor de  $\underline{A}^T$ .

Conclui-se que os menores autovalores estarão mal representados (truncados) na matriz de rigidez no computador em que a palavra tem um comprimento fixo. Como é exatamente o menor autovalor da matriz que será o maior autovalor da inversa, está será inicialmente imprecisa. Isto significa que uma vez que a matriz é invertida (ou resolução equivalente) e representada no computador através de palavras de comprimento fixo, não é possível recobrar esta informação inicialmente truncada quer seja usando dupla precisão ou processos iterativos. Assim também, informações essenciais sobre as diferenças entre os deslocamentos estão contidas nos últimos dígitos dos coeficientes de rigidez. Este erro pode ser representado pela seguinte equação, num computador operando com a precisão "p" [9], [10]:

$$\frac{||\delta a_{ij}||}{||a_{ij}||} \leq 10^{-p} \quad (1.45)$$

#### 1.6.c - O MAL CONDICIONAMENTO E O NÚMERO DE CONDICIONAMENTO

Diz-se que uma matriz é mal condicionada em relação a uma operação quando os resultados da mesma são bastan-



te modificados por pequenas perturbações na matriz. Este problema pode ser visto como a falta de informação sobre os menores modos de uma matriz. Por causa do truncamento inicial, num problema mal condicionado, a matriz terá que ser representada desde o início em dupla precisão e também ser resolvida em dupla precisão (com excessão da etapa de redução do vetor de cargas) no processo clássico. Chama-se número de condicionamento (conditioning number) à razão entre os autovalores extremos de uma matriz.

$$C(\underline{A}) = \frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|} \quad (\text{número de condicionamento espectral}) \quad (1.46)$$

Quando o número de condicionamento cresce, os menores autovetores de  $\underline{A}$  (eq. 1.44) tornam-se mal representados no computador. As eqs. (1.44) e (1.46) significam que para o aumento de cada potência de dez no número de condicionamento, o menor autovetor perderá aproximadamente 1 (um) algarismo significativo no conjunto de números que representam aquela matriz no computador [9]. Tal regra apresenta resultados conservativos. Quanto maior for o  $C(\underline{A})$ , tanto maior será a tendência da matriz  $\underline{A}$  para a singularidade.

Para podermos comparar um vetor com outro, podemos usar como indicador o comprimento euclideano:

$$||\underline{v}||_e = \left( \sum_{i=1}^N v_i^2 \right)^{1/2} \quad (1.47)$$

Como caso mais geral existem as normas Hölder:

$$||\underline{v}||_h = \left( \sum_{i=1}^N |v_i|^h \right)^{1/h} \quad (1.48)$$

A norma euclídeana é um caso particular (quando  $h = 2$ ). Define-se como norma Hölder de uma matriz:

$$||\underline{A}||_h = \max ||\underline{A} \cdot \underline{x}||_h$$

onde (1.49)

$$||\underline{x}||_h = 1$$

Como caso particular, para  $h=1$  e  $h=2$ , temos:

$$||\underline{A}||_1 = \max_{j=1,N} \sum_{i=1}^N |a_{ij}| \quad (1.50)$$

$$||\underline{A}||_2 = \max ||\underline{A} \cdot \underline{x}||_2 \quad \text{onde} \quad ||\underline{x}||_2 = 1 \quad (1.51)$$

Em função destas normas estabelecem-se números de condicionamento. Isto é necessário porque o critério já exposto (eq. 1.46) é válido para (1.44) e esta só se aplica quando a matriz é simétrica ou tem autovalores distintos. Além disso, para algumas matrizes, é mais fácil obter as normas do que os autovalores extremos. Assim, outros números de condicionamento podem ser definidos através das normas [9] como:

$$C(\underline{A}) = ||\underline{A}|| \cdot ||\underline{A}||^{-1} \quad (1.52)$$

Podemos agora calcular o efeito do erro em  $\underline{K}$  (1.45) sobre os deslocamentos  $\underline{D}$  num sistema da forma (1).

$$(\underline{K} + \delta \underline{K})(\underline{D} + \delta \underline{D}) = \underline{F}$$

$$\underline{K} \cdot \delta \underline{D} = \underline{F} - \underline{K} \cdot \underline{D} - \delta \underline{K}(\underline{D} + \delta \underline{D})$$

$$\delta \underline{D} = -\underline{K}^{-1} \cdot \delta \underline{K}(\underline{D} + \delta \underline{D})$$

Tomando a norma dos membros desta última equa-

ção, temos:

$$||\delta \underline{D}|| = ||\underline{K}^{-1} \cdot \delta \underline{K} \cdot (\underline{D} + \delta \underline{D})||$$

$$||\delta \underline{D}|| \leq ||\underline{K}^{-1}|| \cdot ||\delta \underline{K}|| \cdot ||\underline{D}|| \cdot \frac{||\underline{K}||}{||\underline{K}||}$$

De (1.52) vem:

$$\frac{||\delta \underline{D}||}{||\underline{D}||} \leq C(\underline{K}) \cdot \frac{||\delta \underline{K}||}{||\underline{K}||}$$

Utilizando a aproximação da equação (1.45), podemos substituir  $\frac{||\delta \underline{K}||}{||\underline{K}||}$  por  $10^{-p}$  e  $\frac{||\delta \underline{D}||}{||\underline{D}||}$  por  $10^{-c}$ , obtendo:

$$c \geq p - \log_{10}[C(\underline{K})] \quad (1.53)$$

Observe-se que esta fórmula fornece o número de dígitos corretos "c" nos deslocamentos, considerando apenas o efeito do truncamento inicial na matriz de rigidez (não se considerou o erro de arredondamento, nem o truncamento inicial no vetor de cargas).

O erro pode ser também obtido depois de resolvido o problema através da restituição do vetor de cargas a partir dos deslocamentos calculados [10]:

$$C(\underline{K}) = \frac{||\underline{D} - \underline{K}^{-1} \cdot \underline{F}||}{||\underline{D}||} \leq \frac{||\delta \underline{F}|| \cdot ||\underline{K}^{-1}||}{||\underline{D}||} \quad (1.54)$$

Entretanto, este último método, por não apresentar resultados conservativos, exige maior cuidado ao ser empregado.

Em seguida apresenta-se um exemplo simples do problema de mal condicionamento. A matriz de rigidez do conjun-

to de molas da figura 1 pode ser escrita como:

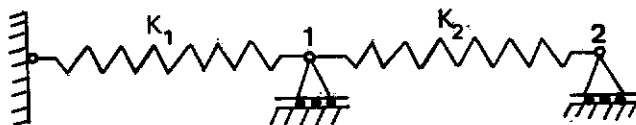


Figura 1

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

Para calcular os autovalores desta matriz resolvemos o determinante:

$$\begin{vmatrix} k_1 + k_2 - \lambda & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (1.55)$$

A razão entre os autovalores (1.46) assim calculados, nos fornece o número de condicionamento.

$$C(\underline{\underline{K}}) = \frac{k_1 + 2k_2 + \sqrt{k_1^2 + 4k_2^2}}{k_1 + 2k_2 - \sqrt{k_1^2 + 4k_2^2}}$$

Se  $k_1 \gg k_2$  ou  $k_1 \ll k_2$  teremos um  $C(\underline{\underline{K}})$  muito grande. Entretanto apenas no segundo caso aparecem dificuldades para se resolver para  $\underline{\underline{K}}$  um sistema da forma (1). Temos portanto um mal condicionamento artificial. Poderemos evitar este problema se minimizarmos o número de condicionamento através da seguinte operação sobre a matriz  $\underline{\underline{K}}$  ("scaling": [10], [14]):

$$\underline{\underline{K}}' = \underline{\underline{D}}^* \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{D}}^* \quad (1.56)$$

onde  $\underline{\underline{D}}^*$  é uma matriz diagonal com  $d_i^* = \frac{1}{\sqrt{k_{ii}}}$ .

O "scaling" simétrico de uma matriz simétrica positivo definida torna unitários os elementos da diagonal e garante que os termos fora da diagonal têm módulo menor do que 1. O processo não destrói a característica de positivo-definida da matriz. Assim, temos:

$$\underline{D}^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{k_1+k_2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{k_2}} \end{bmatrix}$$

e de (1.55) e (1.56):

$$\underline{K}' = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-k_2}{\sqrt{k_2(k_1+k_2)}} \\ \frac{-k_2}{\sqrt{k_2(k_1+k_2)}} & 1 \end{bmatrix}$$

Calculados os autovalores, teremos:

$$C(K') = \frac{1 + \sqrt{\frac{k_2}{k_1+k_2}}}{1 - \sqrt{\frac{k_2}{k_1+k_2}}}$$

para  $k_1 \gg k_2 \rightarrow C(K') = 1$

e para  $k_2 \gg k_1 \rightarrow C(K') \rightarrow \infty$

No segundo caso temos, portanto, um mal condicionamento real. Nas estruturas isto ocorre quando se tem a rigidez dos elementos próximos ao apoio muito inferior (flexíveis)

à dos demais (rígidos). Por isto usamos para testar o nosso programa (item 5.3.b) uma treliça plana em que diminuimos gradativamente a rigidez de uma das barras próximas ao apoio. Consegue-se com isto um exemplo de mal condicionamento real. Fazemos uso nesta aplicação das equações (1.50), (1.51), (1.52), (1.53) e (1.56).

Teremos problemas de mal condicionamento tanto em estruturas que tenham áreas rígidas entre áreas flexíveis como partes flexíveis entre partes relativamente rígidas. Isto conduz a uma perda de precisão nos deslocamentos de toda estrutura. Uma vez que as equações de equilíbrio são escritas em termos das diferenças entre os deslocamentos dos nós conectados pelos elementos, estas equações falharão se as diferenças forem desprezíveis em relação aos deslocamentos. A técnica de resolução do problema por partes, decompondo a estrutura em subestruturas, faz com que os deslocamentos de corpo rígido sejam eliminados na avaliação das deformações dos elementos internos a uma subestrutura, podendo, portanto, fornecer melhores resultados. [9]

#### 1.6.d - COMPARAÇÕES ENTRE O MÉTODO CLÁSSICO E O MÉTODO DO FATOR NATURAL

No exemplo do item 5.3.b, utiliza-se a equação (1.52) para calcular o número de condicionamento da matriz de rigidez

$$C(\underline{K}_{nn}) = ||\underline{K}_{nn}|| \cdot ||\underline{K}_{nn}^{-1}|| \quad (1.57)$$

Mostra-se nas referências [1] e [2] que:

$$C(\underline{S}) = [C(\underline{K}_{nn})]^{1/2} \quad (1.58)$$

onde  $\underline{S}$  se relaciona com  $\underline{K}_{nn}$  pela equação (1.35).

Estas relações nos permitem verificar que teremos uma perda muito menor de algarismos significativos no método do fator natural. Isto permitirá fazer em precisão simples o cálculo de estruturas mal condicionadas que teria de ser feito em precisão dupla pelo método clássico. Com isto poderemos economizar memória nos computadores.

Na referência [11] ressaltam-se ainda os limites do erro para a obtenção do fator de Cholesky pelo método clássico e pelo método de fator natural. No cálculo do número de condicionamento, sugere-se que a matriz deva ser submetida ao "scaling", tornando-a diagonal dominante e evitando assim o mal condicionamento artificial. O autovalor máximo é então aproximado pela norma Hölder 1  $||\underline{K}'||_1$  da matriz transformada e o autovalor mínimo é calculado por iterações inversas. Para o novo método deve-se fazer o "scaling" da matriz  $\underline{S}$  de tal forma que cada coluna tenha comprimento unitário. Tem-se respectivamente:

$$\frac{||\underline{\delta D}||}{||\underline{D}||} \leq \frac{||\underline{K}'||_1}{\lambda_n} \cdot 2^{-t} \quad (\text{onde } t \text{ é o número de dígitos da mantissa do número representado no computador})$$

$$\frac{||\underline{\delta D}||}{||\underline{D}||} \leq \frac{||\underline{S}||_1 \cdot ||\underline{\bar{U}}_H^{-1} \cdot \underline{F}||}{||\underline{\bar{D}}|| \cdot \lambda_n} \cdot 2^{-t}$$

sendo  $\underline{\bar{U}}_H$  o fator de Cholesky computado por Householder e  $\underline{\bar{D}}$  o vetor de deslocamentos computado. Observa-se que, enquanto que o processo iterativo não é aconselhável para o processo normal de Cholesky, uma vez que os erros de truncamento e de arredondamento são da mesma ordem de grandeza e podem agir em direções contrá -

rias, o mesmo não acontece com o novo método. Uma vez que se monta diretamente um fator  $\underline{S}$  da matriz de rigidez  $\underline{K}$  o erro de truncamento inicial (eq. 1.58) tem uma importância bem menor. Portanto, consegue-se agora melhorar os erros de arredondamento, reduzindo portanto os erros numéricos totais, através de um processo iterativo [6].

$$\underline{RES}_1 = \underline{F} - \underline{K} \cdot \underline{D}_1$$

$$\underline{K} \cdot \Delta \underline{D}_1 = \underline{RES}_1 \quad (1.59)$$

$$\underline{D}_2 = \underline{D}_1 + \Delta \underline{D}_1$$

$$\underline{K} \cdot \Delta \underline{D}_2 = \underline{F} - \underline{K} \cdot \underline{D}_2 = \underline{RES}_2$$

A referência [11] fornece resultados indicando a aplicação vantajosa, quanto à precisão, do método do fator natural em relação ao método clássico para números de condicionamento da ordem de  $10^7$ , enquanto que, para números de condicionamento menores ( $10^4$ ), a vantagem é pequena. (Computador UNIVAC-1108 com 27 bits; 8.1 casas decimais).

No ítem (5.3) apresentam-se resultados numéricos comparando os dois métodos em tempo, precisão e gasto de memória no computador.



### 1.7 - OBSERVAÇÕES SOBRE A TÉCNICA DE SUBESTRUTURAS E ANÁLISE DINÂMICA

Para analisarmos problemas estruturais em que o número de incógnitas é elevado, temos que adotar a técnica de subestruturas. Cada subestrutura terá seus graus de liberdade locais (L) e aqueles pertencentes a uma subestrutura e outra adjacente (Externos, "E") [2]. A equação (1) pode ser reescrita em forma particionada como abaixo:

$$\begin{bmatrix} \tilde{K}_{EE} & \tilde{K}_{EL} \\ \tilde{K}_{LE} & \tilde{K}_{LL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{D}_E \\ \tilde{D}_L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{F}_E \\ \tilde{F}_L \end{Bmatrix} \quad (1.60)$$

Podemos assim reduzir nosso sistema através da eliminação dos graus de liberdade locais ( $\tilde{D}_L$ ) como se mostra a - baixo:

$$\hat{\tilde{K}}_{EE} \cdot \tilde{D}_E = \hat{\tilde{F}}_E \quad (1.61)$$

onde

$$\hat{\tilde{K}}_{EE} = \tilde{K}_{EE} - \tilde{K}_{LE}^t \cdot \tilde{K}_{LL}^{-1} \cdot \tilde{K}_{LE} \quad (1.62)$$

$$\hat{\tilde{F}}_E = \tilde{F}_E - \tilde{K}_{LE}^t \cdot \tilde{K}_{LL}^{-1} \cdot \tilde{F}_L \quad (1.63)$$

Para o fator natural da matriz de rigidez, o mesmo pode ser feito:

$$\underline{S} = [\underline{S}_E \quad \underline{S}_L] \quad (1.64)$$

$$\underline{S}_L = \underline{Q}_L \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_L \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.65)$$

$$\underline{Q}_L = [\underline{Q}_N \quad \underline{Q}_M] \quad (1.66)$$

$$\underline{K}_{EE} = \underline{S}_E^t \cdot \underline{S}_E$$

$$\underline{K}_{LE}^t = \underline{K}_{EL} = \underline{S}_E^t \cdot \underline{S}_L \quad (1.67)$$

$$\underline{K}_{LL} = \underline{S}_L^t \cdot \underline{S}_L$$

Substituindo as expressões acima em (1.62), considerando a partição da matriz  $\underline{Q}_L$  dada pela relação (1.66) obtemos as expressões (1.68).

$$\begin{aligned} \hat{\underline{K}}_{EE} &= \underline{S}_E^t \cdot \underline{S}_E - \underline{S}_E^t \cdot \underline{S}_L \cdot (\underline{S}_L^t \cdot \underline{S}_L)^{-1} \cdot \underline{S}_L^t \cdot \underline{S}_E \\ &= \underline{S}_E^t \cdot [\underline{I} - \underline{S}_L \cdot (\underline{U}_L^t \cdot \underline{U}_L)^{-1} \cdot \underline{S}_L^t] \cdot \underline{S}_E \\ &= \underline{S}_E^t \cdot \underline{Q}_L \cdot [\underline{I} - \underline{Q}_L^t \cdot \underline{S}_L \cdot \underline{U}_L^{-1} \cdot \underline{U}_L^{-t} \cdot \underline{S}_L^t \cdot \underline{Q}_L] \cdot \underline{Q}_L^t \cdot \underline{S}_E \\ \hat{\underline{K}}_{EE} &= \underline{S}_E^t \cdot \underline{Q}_L \cdot \left[ \underline{I} - \begin{bmatrix} \underline{U}_L \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{U}_L^{-1} \cdot \underline{U}_L^{-t} \cdot [\underline{U}_L^t \quad 0] \right] \cdot \underline{Q}_L^t \cdot \underline{S}_E \\ &= \underline{S}_E^t \cdot \underline{Q}_L \cdot \left[ \underline{I} - \begin{bmatrix} \underline{I} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}^{n_L} \cdot [\underline{I}^{n_L} \quad 0] \right] \cdot \underline{Q}_L^t \cdot \underline{S}_E \\ &= \underline{S}_E^t \cdot [\underline{Q}_N \quad \underline{Q}_M] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \underline{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{Q}_N^t \\ \underline{Q}_M^t \end{bmatrix} \cdot \underline{S}_E \\ &= \underline{S}_E^t \cdot \underline{Q}_M \cdot \underline{Q}_M^t \cdot \underline{S}_E \\ \hat{\underline{K}}_{EE} &= \hat{\underline{S}}_E^t \cdot \hat{\underline{S}}_E \quad (1.68) \end{aligned}$$

onde

$$\hat{\underline{S}}_E = \underline{Q}_M^t \cdot \underline{S}_E$$

onde  $\hat{\underline{S}}_E$  é o fator da matriz de rigidez condensada.

Analogamente, prova-se que:

$$\hat{\underline{F}}_E = \underline{F}_E - \underline{S}_E^t \cdot \underline{Q}_N \cdot \underline{U}^{-t} \cdot \underline{F}_L \quad (1.69)$$

Para resolver o sistema (1.61) utiliza-se o mesmo processo visto nos itens (1.4) e (1.5), aplicado agora ao fator  $\hat{\underline{S}}_E$ . Encontra-se assim o fator de Cholesky  $\hat{\underline{U}}_E$  associado ao sistema condensado e, em seguida, o respectivo vetor de deslocamentos.

$$\hat{\underline{S}}_E = \hat{\underline{Q}}_E \cdot \begin{bmatrix} \hat{\underline{U}}_E \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.70)$$

Em análise dinâmica faz-se também necessário uma redução do número de graus de liberdade do sistema estrutural. Assim, ao invés de termos graus de liberdade locais e externos, teríamos agora os principais e outros dependentes dos primeiros, aos quais continuamos a atribuir os índices "E" e "L" respectivamente. A equação (1.71), que descreve o comportamento de um sistema sujeito a vibrações forçadas, encontra-se assim particionada. Os deslocamentos e acelerações dos pontos nodais podem ser colocados em função apenas dos graus de liberdade principais (eqs. 1.72).

$$\begin{bmatrix} \underline{K}_{EE} & \underline{K}_{EL} \\ \underline{K}_{LE} & \underline{K}_{LL} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{D}_E(t) \\ \underline{D}_L(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{M}_{EE} & \underline{M}_{EL} \\ \underline{M}_{LE} & \underline{M}_{LL} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\underline{D}}_E(t) \\ \ddot{\underline{D}}_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F}_E(t) \\ \underline{F}_L(t) \end{bmatrix} \quad (1.71)$$

$$\underline{D}(t) = \begin{Bmatrix} \underline{D}_E \\ \vdots \\ \underline{D}_L \end{Bmatrix} = \underline{T} \cdot \underline{D}_E(t) \quad (1.72)$$

$$\underline{\ddot{D}}(t) = \underline{T} \cdot \underline{\ddot{D}}_E(t)$$

onde

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} & & \underline{I} & \\ & \ddots & & \\ & & & \\ \underline{K}_{LL}^{-1} & & & \underline{K}_{LE} \end{bmatrix}$$

Assim teremos que resolver agora o sistema de equações condensado na forma abaixo.

$$\hat{\underline{K}}_E \cdot \underline{D}_E + \hat{\underline{M}}_E \cdot \underline{\ddot{D}}_E = \hat{\underline{F}}_E$$

onde

$$\hat{\underline{K}}_E = \underline{T}^t \cdot \underline{K} \cdot \underline{T} \quad (1.73)$$

$$\hat{\underline{M}}_E = \underline{T}^t \cdot \underline{M} \cdot \underline{T}$$

$$\hat{\underline{F}}_E = \underline{T}^t \cdot \underline{F}$$

O cálculo da matriz de transformação  $\underline{T}$  requer, no novo método, como se demonstra abaixo, apenas a avaliação de  $\underline{U}_L^{-1}$  enquanto que no método clássico temos que avaliar  $\underline{K}_{LL}^{-1}$ . Isto torna o novo método mais estável nos processos de subestruturação e análise dinâmica, uma vez que  $\underline{U}_L$  é mais bem condicionado do que  $\underline{K}_{LL}$ .

$$\begin{aligned} \underline{K}_{LL}^{-1} \cdot \underline{K}_{LE} &= [\underline{S}_L^t \cdot \underline{S}_L]^{-1} \cdot \underline{S}_L^t \cdot \underline{S}_E = \left[ [\underline{U}_L^t : 0] \cdot \underline{Q}_L^t \cdot \underline{Q}_L \begin{bmatrix} \underline{U}_L \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right]^{-1} \cdot \underline{S}_L^t \cdot \underline{S}_E = \\ &= [\underline{U}_L^t \cdot \underline{U}_L]^{-1} \cdot \underline{S}_L^t \cdot \underline{Q}_L \cdot \underline{Q}_L^t \cdot \underline{S}_E = \underline{U}_L^{-1} \cdot \underline{U}_L^{-t} \cdot \underline{U}_L^t \cdot \underline{Q}_L^t \cdot \underline{S}_E \\ &= \underline{U}_L^{-1} \cdot \underline{Q}_L^t \cdot \underline{S}_E \end{aligned} \quad (1.74)$$

## CAPÍTULO II

### A FATORAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO ESTRUTURAL

Neste capítulo são apresentadas algumas das formas de se obter o fator natural da matriz de rigidez do elemento estrutural, ou seja, obter o fator  $F_i$  da equação (1.28). Os elementos mais simples podem ter seus fatores formulados explicitamente. Estuda-se aqui também a obtenção do fator natural através da utilização da integração de Gauss. Outras formas de obtenção do fator natural são indicadas nas referências [1] e [3], não sendo aqui desenvolvidas.

#### 2.1 - FORMULAÇÃO EXPLÍCITA

Formulamos aqui explicitamente o fator natural para os elementos de treliça plana e espacial, de pórtico plano e para os elementos finitos triangulares para o estado plano de tensões (e de deformações) com variação linear dos deslocamentos.

##### 2.1.a - TRELIÇA PLANA

Sejam  $x_L$ ,  $y_L$  o sistema de referência local do elemento de treliça plana da figura 2.1. e  $X$ ,  $Y$  o sistema de referência global.

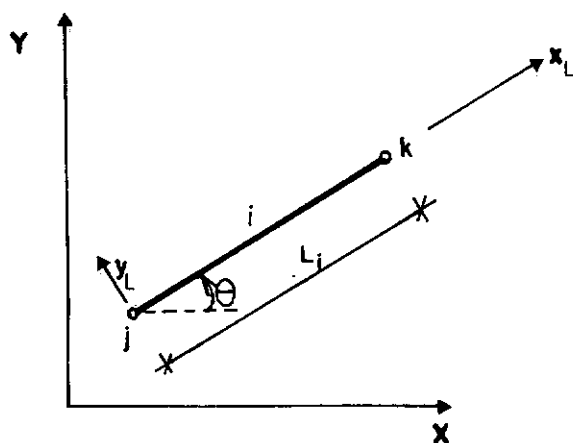


Fig. 2.1 - ELEMENTO DE TRELIÇA PLANA

As equações (1.1), (1.2), (1.7) e (1.13), para este elemento, podem ser escritas como abaixo.  $A_i$  é a seção transversal da barra.

$$f_i = \begin{bmatrix} (1 - \frac{x}{L}) & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_j \\ q_k \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

$$\epsilon_i = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L_i} & \frac{1}{L_i} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_j \\ q_k \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

$$k_{Ni} = \int_0^{L_i} A_i \cdot \begin{bmatrix} -1/L & 1/L \end{bmatrix} \cdot E_i \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} dx \quad (2.3)$$

$$\begin{Bmatrix} q_j \\ q_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d_{xj} \\ d_{yj} \\ d_{xk} \\ d_{yk} \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

Portanto, a matriz de rigidez do elemento no sistema global pode ser escrita como em (2.5).

$$\begin{aligned}
 \underline{k}_i &= \underline{R}_i^T \cdot \underline{k}_{Ni} \cdot \underline{R}_i = \begin{bmatrix} \underline{r}_{i2 \times 1}^T & 0 \\ 0 & \underline{r}_{i2 \times 1}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{E_i A_i}{L_i} & -\frac{E_i A_i}{L_i} \\ -\frac{E_i A_i}{L_i} & \frac{E_i A_i}{L_i} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{r}_{i1 \times 2} & 0 \\ 0 & \underline{r}_{i1 \times 2} \end{bmatrix} \\
 \underline{k}_i &= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta & -\cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta & -\sin^2 \theta \\ -\cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & -\sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix} \cdot \frac{E_i A_i}{L_i} \quad (2.5)
 \end{aligned}$$

A matriz  $\underline{k}_{Ni}$  pode ser fatorada como:

$$\underline{k}_{Ni} = \underline{F}_{Ni}^T \cdot \underline{F}_{Ni} = \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} \cdot [a \quad b] = \begin{bmatrix} a^2 & a \cdot b \\ a \cdot b & b^2 \end{bmatrix}$$

Temos que:

$$a^2 = \frac{E_i A_i}{L_i} \quad \rightarrow \quad a = \sqrt{\frac{E_i A_i}{L_i}}$$

$$a \cdot b = -\frac{E_i A_i}{L_i} \quad b = -\sqrt{\frac{E_i A_i}{L_i}}$$

$$\rightarrow \underline{F}_{Ni} = \sqrt{\frac{E_i A_i}{L_i}} \cdot [1 \quad -1] \quad (2.6)$$

$$\underline{F}_i = \underline{F}_{Ni} \cdot \underline{R}_i = \sqrt{\frac{E_i A_i}{L_i}} \cdot [1 \quad -1] \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}$$

$$\underline{F}_i = \left( \frac{E_i A_i}{L_i} \right)^{1/2} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & -\cos \theta & -\sin \theta \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

A equação (2.6) nos fornece o fator natural da matriz de rigidez do elemento de treliça. A equação (2.7) nos permite montar este fator, para a treliça plana, diretamente no sistema global de referência como está exemplificado no item (5.3.a) . Sendo CX e CY os cossenos dos ângulos entre a direção  $x_L$  do elemento e X,Y respectivamente, notação esta utilizada na programação automática, podemos reescrever (2.7) como abaixo.

$$\underline{F}_i = \left( \frac{E_i A_i}{L_i} \right)^{1/2} \cdot [CX \ CY \ -CX \ -CY] \quad (2.8)$$

#### 2.1.b - TRELIÇA ESPACIAL

A dedução é análoga à anterior. A equação (2.6) é ainda válida e a partir dela deduzimos agora uma equação semelhante à (2.8), em que CZ é o cosseno do ângulo entre a direção  $x_L$  do elemento e o eixo global de referência Z . A matriz  $\underline{R}_i$  é, neste caso, expressa como em (2.9).

$$\begin{aligned} \underline{r}_{i1 \times 3} &= [CX \ CY \ CZ] \\ \underline{R}_{i2 \times 6} &= \begin{bmatrix} \underline{r}_i & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{r}_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\underline{F}_i = \left( \frac{E_i A_i}{L_i} \right)^{1/2} \cdot [CX \ CY \ CZ \ -CX \ -CY \ -CZ] \quad (2.10)$$



### 2.1.c - PÓRTICO PLANO

Para este elemento foi adotado um sistema de referência local cuja origem está fixada na extremidade inicial do mesmo.

O eixo  $z_L$ , perpendicular ao plano da estrutura, tem definido o seu sentido positivo quando voltado para o lado oposto ao que se encontra o observador. O eixo  $y_L$  é determinado de forma a compor o triedro  $x_L-y_L-z_L$  [5], [15].

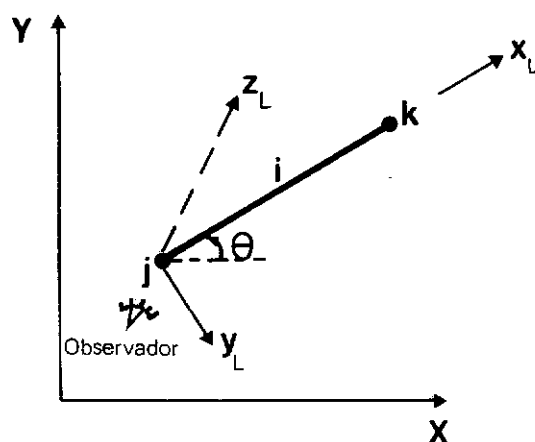


Fig. 2.2 - SISTEMA DE REFERÊNCIA PARA O ELEMENTO DE PÓRTICO PLANO

As equações (1.7), (1.13) e (1.21), aplicadas a este elemento, nos fornecem as equações abaixo, onde os deslocamentos e as forças atuantes nas extremidades do elemento estão representados nas figuras (2.3) e (2.4) respectivamente.

$$k_{Ni} = \begin{bmatrix} \frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 \\ & \frac{4E \cdot I}{L} & \frac{2E \cdot I}{L} \\ \text{sim} & & \frac{4E \cdot I}{L} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$$r_i = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ & -\cos \theta & 0 \\ \text{sim} & & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_i = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/L & 1 & 0 & -1/L & 0 \\ 0 & 1/L & 0 & 0 & -1/L & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 6} \cdot \begin{bmatrix} r_i & 0 \\ 0 & r_i \end{bmatrix}_{6 \times 6} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\cos \theta & -\sin \theta & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ \frac{\sin \theta}{L} & -\frac{\cos \theta}{L} & -1 & -\frac{\sin \theta}{L} & \frac{\cos \theta}{L} & 0 \\ \frac{\sin \theta}{L} & -\frac{\cos \theta}{L} & 0 & -\frac{\sin \theta}{L} & \frac{\cos \theta}{L} & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = A_i \cdot \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = A_i^T \cdot \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

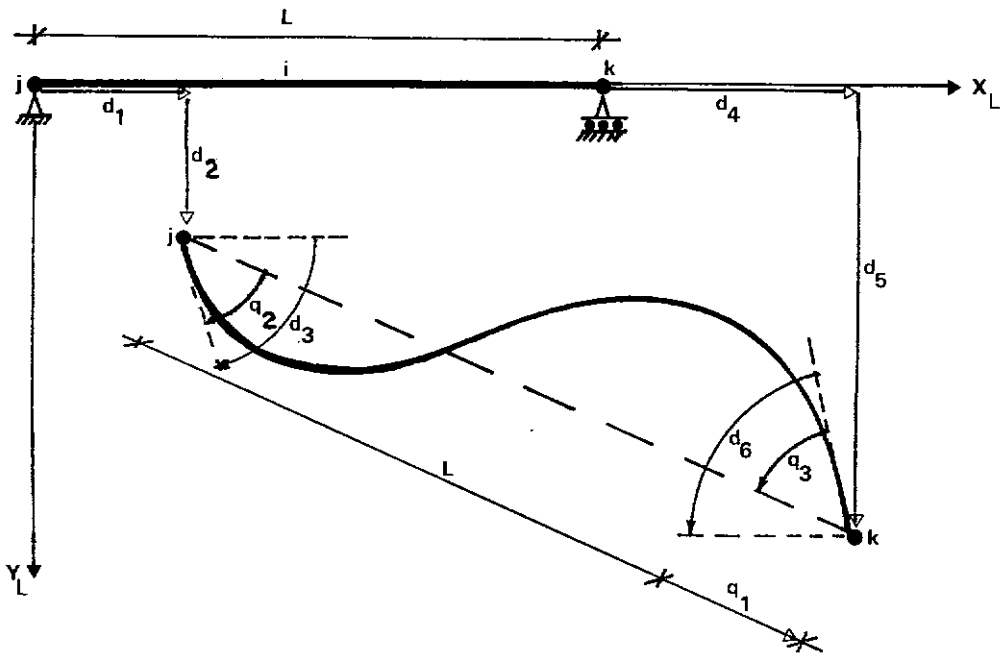


Fig. 2.3 - DESLOCAMENTOS NA EXTREMIDADE DE UM ELEMENTO DE PÓRTICO PLANO

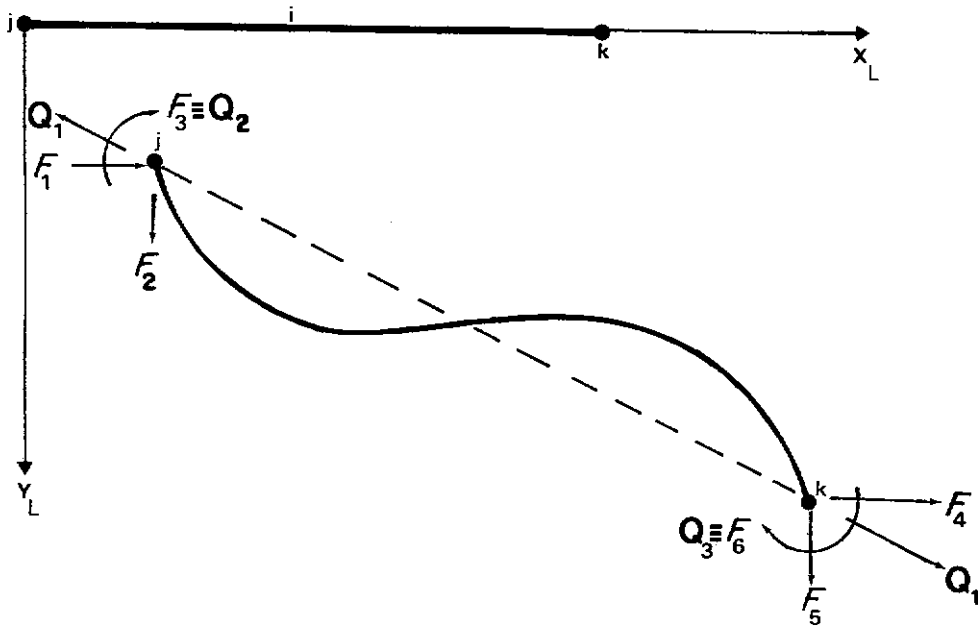


Fig. 2.4 - FORÇAS ATUANTES NAS EXTREMIDADES DOS ELEMENTOS DE PÓRTICO PLANO

A matriz de rigidez (2.11) pode ser fatorada (por Cholesky, por exemplo) fornecendo-nos o fator natural  $\tilde{F}_{Ni}$  :

$$\tilde{F}_{Ni} = \left(\frac{E}{L}\right)^{1/2} \cdot \begin{bmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 2(I)^{1/2} & I^{1/2} \\ 0 & 0 & (3I)^{1/2} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Para obtermos o fator  $\tilde{F}_i$  no sistema global (eq. 2.16) temos que fazer a seguinte transformação:

$$\tilde{F}_i = \tilde{F}_{Ni} \cdot A_i \quad (2.15)$$

$$\tilde{F}_i = \left(\frac{E}{L}\right)^{1/2} \cdot \begin{bmatrix} -A^{1/2} \cdot \cos\theta & -A^{1/2} \cdot \sin\theta & 0 & A^{1/2} \cdot \cos\theta & A^{1/2} \cdot \sin\theta & 0 \\ \frac{3(I)^{1/2}}{L} \sin\theta & \frac{-3(I)^{1/2}}{L} \cos\theta & -2(I)^{1/2} & \frac{3(I)^{1/2}}{L} \sin\theta & \frac{3(I)^{1/2}}{L} \cos\theta & -(I)^{1/2} \\ \frac{(3I)^{1/2}}{L} \sin\theta & \frac{-(3I)^{1/2}}{L} \cos\theta & 0 & \frac{-(3I)^{1/2}}{L} \sin\theta & \frac{(3I)^{1/2}}{L} \cos\theta & -(3I)^{1/2} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Supõe-se, na análise deste elemento, que o sistema de eixos locais sejam os eixos principais de inércia e que o centro de cisalhamento coincida com o centro de gravidade. Além disso, as cargas aplicadas no elemento serão sempre transformadas em cargas equivalentes aplicadas nos nós.

### 2.1.d - ELEMENTO FINITO TRIANGULAR PARA ESTADO PLANO, COM VARIAÇÃO LINEAR DOS DESLOCAMENTOS

Seja o elemento triangular referido ao sistema de coordenadas  $X, Y$  da figura (2.5). A espessura  $t$  é constante. Assume-se uma variação linear dos deslocamentos  $q_i$  de acordo com a equação (2.17). A área do triângulo  $A$  é dada pela equação (2.18) [5] ..

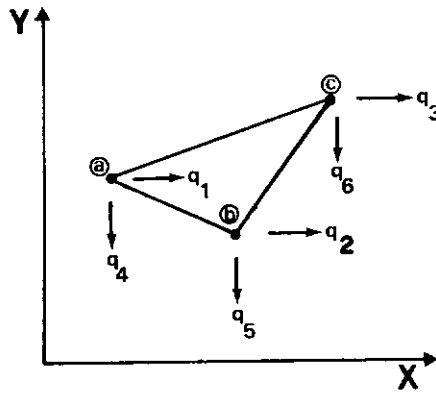


Fig. 2.5 - ELEMENTO TRIANGULAR

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_a & y_a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_b & y_b & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_c & y_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_a & y_a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_b & y_b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_c & y_c \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

$$A_i = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_a & y_a \\ 1 & x_b & y_b \\ 1 & x_c & y_c \end{vmatrix} \quad (2.18)$$

A equação (1.2) para este elemento fica então:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A_i} \cdot \begin{bmatrix} y_b - y_c & y_c - y_a & y_a - y_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_c - x_b & x_a - x_c & x_b - x_a \\ x_c - x_b & x_a - x_c & x_b - x_a & y_b - y_c & y_c - y_a & y_a - y_b \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

A matriz  $\underline{B}_i$  está portanto definida e, através dela, podemos obter a matriz de rigidez do elemento. Como referimos todos os elementos ao mesmo sistema de coordenadas global, obtemos diretamente  $\underline{k}_i$ .

$$\underline{k}_i = \underline{B}_i^T \cdot \underline{E}_i \cdot \underline{B}_i \cdot A_i \cdot t_i \quad (2.20)$$

A lei de Hooke pode ser expressa matricialmente como em (2.21). Para o estado plano de tensões ( $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ ) e para o estado plano de deformações ( $\gamma_{yz} = \gamma_{xz} = \epsilon_z = 0$ ) respectivamente, obtemos explicitamente as equações (2.22).

$$\underline{\sigma}_i = \underline{E}_i \cdot \underline{\epsilon}_i \quad (2.21)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xi} \\ \sigma_{yi} \\ \tau_{xyi} \end{Bmatrix} = \frac{E_i}{1-\nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_{xi} \\ \epsilon_{yi} \\ \gamma_{xyi} \end{Bmatrix} \quad (a) \quad (2.22)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xi} \\ \sigma_{yi} \\ \tau_{xyi} \end{Bmatrix} = \frac{E_i}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} \cdot \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_{xi} \\ \epsilon_{yi} \\ \gamma_{xyi} \end{Bmatrix} \quad (b)$$

O nosso fator natural  $\underline{F}_i$  (em coordenadas globais) (2.23) pode ser obtido através de (2.20), pela fatoração de Cholesky da matriz dos coeficientes de elasticidade  $\underline{E}$  (equação 2.24: a) Est. pl. tensões; b) est. pl. de deformações).

$$\underline{k}_i = \underline{F}_i^T \cdot \underline{F}_i = \left[ \underline{B}_i^T \cdot \underline{G}_i^T \cdot (A_i \cdot t_i)^{1/2} \right] \cdot \left[ (A_i \cdot t_i)^{1/2} \cdot \underline{G}_i \cdot \underline{B}_i \right] \quad (2.23)$$

$$\underline{G}_1 = \left( \frac{E_i}{1-\nu^2} \right)^{1/2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ 0 & (1-\nu^2)^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & \left( \frac{1-\nu}{2} \right)^{1/2} \end{bmatrix} \quad (a)$$

(2.24)

$$\underline{G}_2 = \left[ \frac{E_i}{(1-\nu^2) \cdot (1-2\nu)} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ 0 & (1-2\nu)^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & \left( \frac{(1-2\nu) \cdot (1-\nu)}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

(b)

Portanto, temos finalmente  $\underline{F}_i$  do elemento finito triangular (CST) para o estado plano de tensões (2.25) formulado explicitamente. Para o estado plano de deformações pode-se empregar a mesma equação contanto que se aplique previamente o artifício de utilizar os coeficientes de Poisson e de Young transformados pelas equações (2.26).

$$F_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{t_1 \cdot E_1}{A_1 (1-v^2)} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \begin{bmatrix} (y_b - y_c) & (y_c - y_a) & (y_a - y_b) & v(x_c - x_b) & v(x_a - x_c) & v(x_b - x_a) \\ 0 & 0 & 0 & [(1-v^2)^{\frac{1}{2}}(x_c - x_b)] & [(1-v^2)^{\frac{1}{2}}(x_a - x_c)] & [(1-v^2)^{\frac{1}{2}}(x_b - x_a)] \\ [(\frac{1-v}{2})^{\frac{1}{2}}(x_c - x_b)] & [(\frac{1-v}{2})^{\frac{1}{2}}(x_a - x_c)] & [(\frac{1-v}{2})^{\frac{1}{2}}(x_b - x_a)] & [(\frac{1-v}{2})^{\frac{1}{2}}(y_b - y_c)] & [(\frac{1-v}{2})^{\frac{1}{2}}(y_c - y_a)] & [(\frac{1-v}{2})^{\frac{1}{2}}(y_a - y_b)] \end{bmatrix}$$

(2.25)



$$E' = \frac{E}{1-\nu^2}$$

(2.26)

$$\nu' = \frac{\nu}{1-\nu}$$

Para encontrar as deformações e tensões nos elementos, uma vez conhecidos os deslocamentos nodais, basta utilizar as equações (2.19) e (2.21).

## 2.2 - UTILIZAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DE GAUSS NA FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO TRIANGULAR PARA ESTADO PLANO COM VARIAÇÃO QUADRÁTICA DOS DESLOCAMENTOS

Formularemos aqui o fator natural para o elemento finito triangular (LST: Linear Strain Triangle) para estado plano (de tensões e deformações) com variação quadrática dos deslocamentos, através da utilização da integração numérica de Gauss.

Para obtermos a matriz  $N_i$  (eq. 1.1) introduzimos aqui as coordenadas de área  $L_i, L_j$  e  $L_k$  para o triângulo  $ijk$  da figura 2.6, que se relacionam com as coordenadas cartesianas pelas equações (2.27) [7].

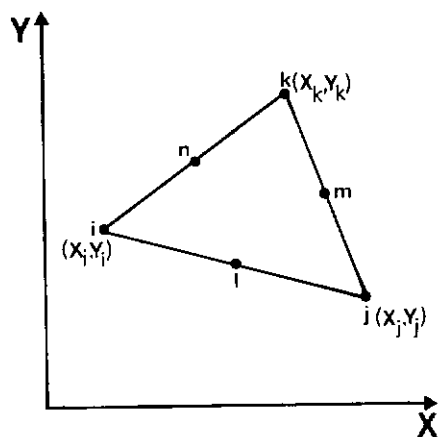


Fig. 2.6 - ELEMENTO FINITO LST

$$\begin{cases} x = L_i \cdot x_i + L_j \cdot x_j + L_k \cdot x_k \\ y = L_i \cdot y_i + L_j \cdot y_j + L_k \cdot y_k \\ 1 = L_i + L_j + L_k \end{cases} \quad (2.27)$$

Explicitando  $L_i$ ,  $L_j$  e  $L_k$  e colocando em forma matricial, vem :

$$\underline{L} = \begin{Bmatrix} L_i \\ L_j \\ L_k \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

onde:

$$\begin{cases} a_1 = x_j \cdot y_k - x_k \cdot y_j \\ b_1 = y_j - y_k \\ c_1 = x_k - x_j \end{cases}$$

e  $A$  é área do triângulo dada pela equação (2.18).

Derivando a relação (2.28) parcialmente em relação a  $x$  e  $y$ , vem:

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial x} = \frac{1}{2A} \cdot \underline{\beta} = \frac{1}{2A} \cdot [(y_j - y_k) \quad (y_k - y_i) \quad (y_i - y_j)] \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial y} = \frac{1}{2A} \cdot \underline{\delta} = \frac{1}{2A} \cdot [(x_k - x_j) \quad (x_i - x_k) \quad (x_j - x_i)]$$

A função de interpolação  $\phi$  para este elemento, em coordenadas de área, vale:

$$\underline{\phi} = [\phi_i \quad \phi_j \quad \phi_k \quad \phi_\ell \quad \phi_m \quad \phi_n] = [L_i \cdot (2L_i - 1) \quad L_j \cdot (2L_j - 1) \quad L_k \cdot (2L_k - 1) \quad 4L_i \cdot L_j \quad 4L_j \cdot L_k \quad 4L_i \cdot L_k] \quad (2.30)$$

e a equação (1.1) pode ser escrita como abaixo:

$$\underline{f}_{i_{2 \times 1}} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\phi} & 0 \\ 0 & \underline{\phi} \end{bmatrix}_{2 \times 12} \cdot \begin{Bmatrix} q_{x1} \\ q_{x2} \\ \vdots \\ q_{x6} \\ q_{y1} \\ \vdots \\ q_{y6} \end{Bmatrix}_{12 \times 1} \quad (2.31)$$

Sendo:

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \epsilon_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \epsilon_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot q_x \\ \epsilon_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot q_y \\ \epsilon_{xy} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot q_y + \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot q_x \end{cases} \quad (2.32)$$

$$\text{Mas } \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial L_p} \cdot \frac{\partial L_p}{\partial x} \quad \text{com } p = i, j, k$$

Utilizando (2.29) e derivando (2.30), vem:

$$\begin{cases} \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial x} = \frac{1}{2A} \cdot \underline{\beta} \cdot \underline{\psi} \\ \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial y} = \frac{1}{2A} \cdot \underline{\delta} \cdot \underline{\psi} \end{cases} \quad (2.33)$$

onde:

$$\underline{\psi}_{3 \times 6} = \begin{bmatrix} 4L_i - 1 & 0 & 0 & 4L_j & 0 & 4L_k \\ 0 & 4L_j - 1 & 0 & 4L_i & 4L_k & 0 \\ 0 & 0 & 4L_k - 1 & 0 & 4L_j & 4L_i \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

De (2.32), (2.33) e (2.34) podemos escrever a matriz  $\underline{B}$ , que pode ser obtida diretamente através das coordenadas dos pontos nodais do elemento.

$$\underline{B}_{3 \times 12} = \frac{1}{2A} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\beta} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\delta} \\ \underline{\delta} & \underline{\beta} \end{bmatrix}_{3 \times 6} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\psi} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\psi} \end{bmatrix}_{6 \times 12} \quad (2.35)$$

Para este elemento e outros mais sofisticados, a integração explícita torna-se complicada. Neste caso, podemos empregar a integração numérica de Gauss através da qual a equação (1.7) pode ser reescrita como:

$$k_i = t \cdot \sum_p w_p \cdot \underline{B}_{ip}^T \cdot \underline{E}_{ip} \cdot \underline{B}_{ip}$$

sendo  $p$  os pontos de integração para o elemento  $i$  e  $w_p$  o peso atribuído ao ponto  $p$ .

Se fatorarmos a matriz das constantes elásticas

da mesma forma que foi feita para o CST , teremos:

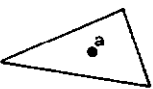
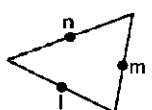
$$\underline{k}_i = (t)^{1/2} \cdot \left( \sum_p w_p \cdot \underline{B}_p^T \cdot \underline{G}_p^T \cdot \underline{G}_p \cdot \underline{B}_p \cdot w_p^{1/2} \right) \cdot (t)^{1/2} \quad (2.36)$$

e então podemos escrever o fator natural da matriz de rigidez do elemento da seguinte forma:

$$\underline{F}_i = \left[ \begin{array}{c} 1/2 \\ w_p \\ \vdots \\ \underline{G} \cdot \underline{B}_{ip} \\ \vdots \end{array} \right] \cdot (t)^{1/2} \quad (2.37)$$

O fator  $\underline{F}_i$  tem, de maneira geral,  $3 \cdot N_p$  linhas (para elementos bidimensionais, sendo  $N_p$  o número de pontos de integração) e  $\ell$  colunas (sendo  $\ell$  o número de graus de liberdade por elemento) no caso em que se emprega a integração numérica.

De acordo com a referência [7] , temos as seguintes fórmulas de integração numérica para o CST e LST, definidos através das coordenadas de área.

INTERPOLAÇÃO DOS DES-LOCAMENTOS	PONTOS	COORDENADAS DE ÁREA	PESO $w_p$
Linear 	a	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	1
Quadrática 	$\ell$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$	$\frac{1}{3}$
	m	$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{3}$
	n	$(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{3}$

Como para o CST temos apenas um ponto de integração com peso ( $w_a=1$ ) unitário e sua matriz  $B_i$  é constante (independe de  $L_i$ ,  $L_j$  e  $L_k$ ) a relação (2.37) reduz-se à equação (2.25), considerando que:

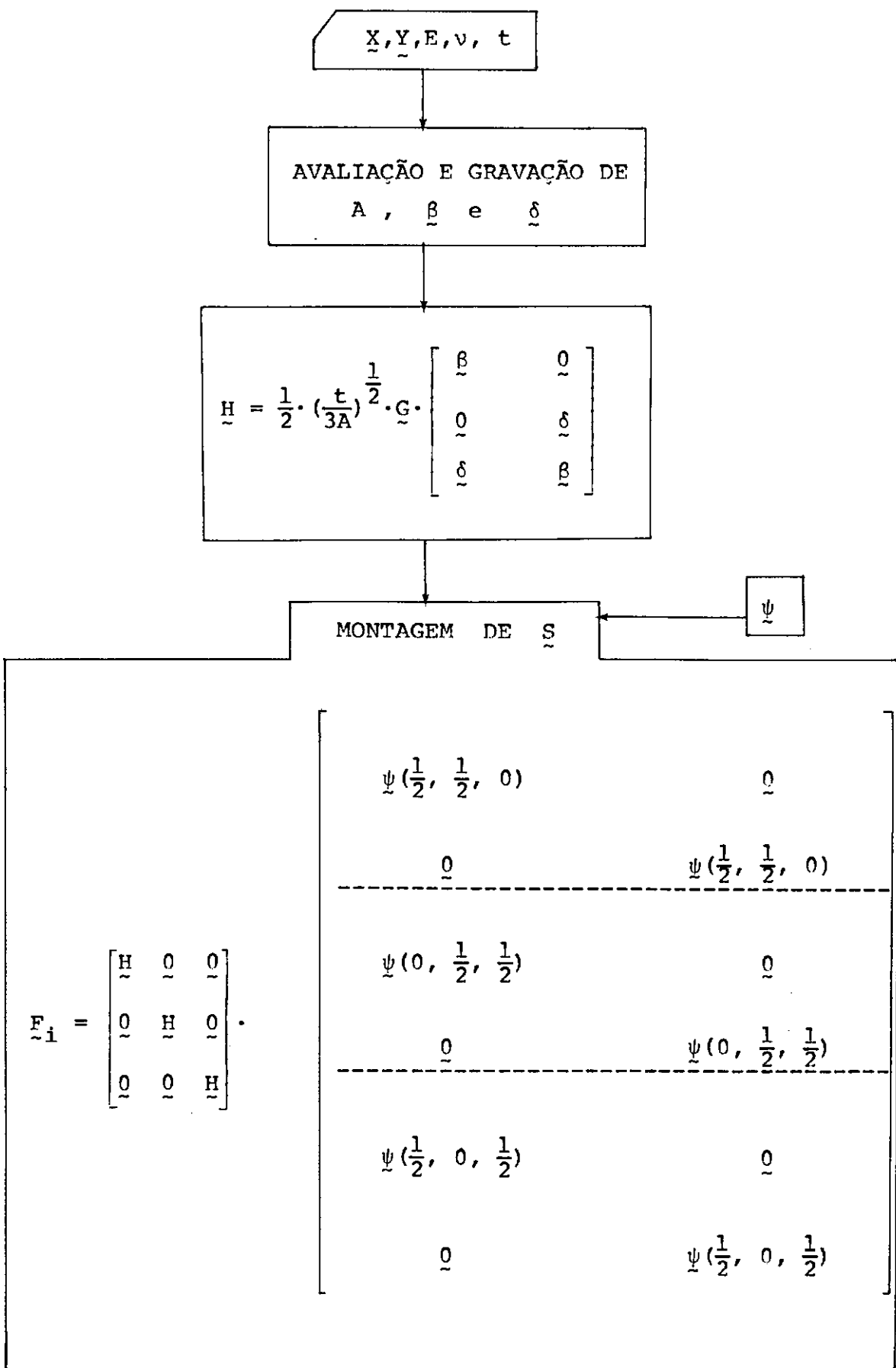
$$\begin{aligned} \underline{k}_i &= t \int_A f(L_i, L_j, L_k) dA = A \cdot t \int_0^1 \int_0^{1-L_i} f(L_i, L_j, L_k) dL_j dL_i = \\ &= A \cdot t \sum_p w_p \cdot f_p(\underline{L}) \end{aligned}$$

Para o LST, os três pontos de integração têm o mesmo peso ( $\frac{1}{3}$ ) e o fator  $F_i$  fica então:

$$\underline{F}_{i_{9 \times 12}} = \left( \frac{A \cdot t}{3} \right)^{1/2} \cdot \begin{bmatrix} \underline{G} \cdot \underline{B} \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right) \\ \underline{G} \cdot \underline{B} \left( 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \\ \underline{G} \cdot \underline{B} \left( \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right) \end{bmatrix} \quad 2.38)$$

Observe-se que o produto  $\underline{F}_i^T \cdot \underline{F}_i$  se encarrega de fazer o somatório para os 3 pontos de integração.

A montagem do fator natural da matriz de rigidez de uma estrutura discretizada em elementos deste tipo segue por - tanto, o seguinte fluxograma:



### CAPÍTULO III

#### O MÉTODO DE TRIANGULARIZAÇÃO POR TRANSFORMAÇÕES ORTOGONAIS

A matriz  $\underline{S}$  obtida na análise de estruturas pelo método do fator natural é retangular ( $MM \times N$ ) . Para obter o fator de Cholesky, conforme descrito no Capítulo I, utilizamos as transformações ortogonais. Assim, no item 3.1 é feita uma revisão da formulação matemática do método da reflexão no qual se baseia o processo de triangularização de Householder. Nos itens 3.2 e 3.3 são apresentados os métodos de Householder e Gram-Schmidt respectivamente. No item final deste capítulo fazem-se algumas considerações práticas sobre os métodos estudados. Exemplos de aplicação destes métodos são apresentados no item 5.3.a .

#### 3.1 - FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Uma matriz  $\underline{P}$  é ortogonal se

$$\underline{P}^T \cdot \underline{P} = \underline{P} \cdot \underline{P}^T = \underline{I} \quad (3.1)$$

ou

$$\underline{P}^T = \underline{P}^{-1}$$

onde  $\underline{I}$  é a matriz identidade,  $\underline{P}^T$  é a matriz  $\underline{P}$  transposta e  $\underline{P}^{-1}$  é a inversa de  $\underline{P}$  .

Para resolvermos algoritmos para cálculo de autovalores, a mudança de base é um processo importante. Se usarmos



uma matriz ortogonal na mudança de base teremos:

$$\bar{\underline{A}} = \underline{P}^T \cdot \underline{A} \cdot \underline{P} = \underline{P}^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \underline{P} \quad (3.2)$$

onde  $\bar{\underline{A}}$  tem o mesmo posto, a mesma equação característica, os mesmos autovalores, o mesmo traço (soma dos elementos da diagonal principal) e o mesmo determinante que  $\underline{A}$ . Temos uma transformação similar ortogonal [16].

Como veremos, as transformações ortogonais podem ser utilizadas também para triangularizar uma matriz retangular.

Podemos utilizar dois tipos de matrizes ortogonais: as matrizes de rotação ou as de reflexão. Utilizaremos aqui as de reflexão [17], em que  $\underline{P}$  fica definida por:

$$\underline{P} = \underline{I} - \alpha \cdot \underline{v} \cdot \underline{v}^T \quad \text{com} \quad \alpha = \frac{2}{\underline{v}^T \cdot \underline{v}} \quad (3.3)$$

onde  $\underline{v}$  é arbitrário.  $\underline{P}$  é chamada matriz de reflexão porque o vetor  $\underline{P} \cdot \underline{t}$  é a reflexão do vetor  $\underline{t}$  em relação ao plano ao qual  $\underline{v}$  é ortogonal. Para o caso bidimensional, temos a representação da figura 3.1.

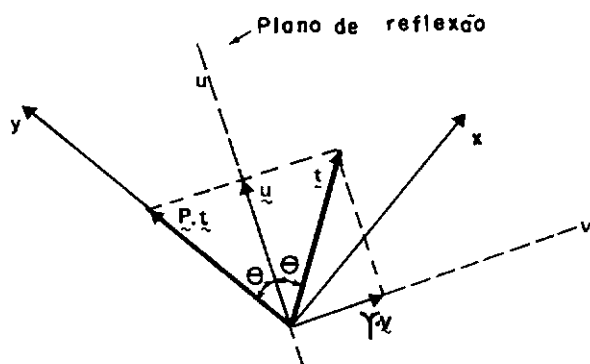


FIGURA 3.1 - REFLEXÃO DO VETOR  $\underline{v}$

Para o caso n-dimensional podemos demonstrar a propriedade de reflexão da matriz  $\underline{P}$  tomando as componentes do vetor  $\underline{t}$  n-dimensional,  $\gamma \cdot \underline{v}$  na direção  $\underline{v}$  e  $\underline{u}$  perpendicular a  $\underline{v}$ . Temos, para a componente  $\gamma \cdot \underline{v}$ :

$$\begin{aligned}\underline{P} \cdot \gamma \cdot \underline{v} &= \gamma \cdot \underline{v} - \alpha \cdot \underline{v} \cdot \underline{v}^T \cdot \gamma \cdot \underline{v} \\ &= \gamma \cdot \left[ \underline{v} - \frac{2}{(\underline{v}^T \cdot \underline{v})} \cdot \underline{v} \cdot (\underline{v}^T \cdot \underline{v}) \right] \\ &= \gamma \cdot (\underline{v} - 2\underline{v}) \\ &= -\gamma \cdot \underline{v}\end{aligned}\tag{3.4}$$

Ou seja, a componente na direção de  $\underline{v}$  teve sua direção invertida. Para a componente ortogonal a  $\underline{v}$ , temos:

$$\underline{P} \cdot \underline{u} = \underline{u} - \alpha \cdot \underline{v} \cdot \underline{v}^T \cdot \underline{u}$$

Como  $\underline{v}$  é ortogonal a  $\underline{u}$ , temos:  $\underline{v}^T \cdot \underline{u} = 0$ .

Portanto,

$$\underline{P} \cdot \underline{u} = \underline{u}\tag{3.5}$$

Os resultados (3.4) e (3.5) demonstram a propriedade de reflexão da matriz  $\underline{P}$  definida em (3.3).

Na figura (3.1) temos a particularidade de que  $\underline{t}$  foi refletido para a direção  $\underline{y}$ , não tendo portanto componente na direção  $\underline{x}$ .

As matrizes de reflexão são utilizadas no processo de triangularização de Householder. Tomando como exemplo a triangularização por colunas para obtenção da matriz triangular

superior, visamos, em cada passo  $p$  do processo, anular os coeficientes da coluna  $p$  abaixo da diagonal, ou ainda, observando a figura 3.2, visamos transformar o vetor  $\underline{t}_1$  de tal forma que ele só tenha uma componente não nula no subespaço de dimensão  $m-p+1$ .

$$\underline{A}^p = p \rightarrow \begin{bmatrix} \overbrace{\underline{U}_{p-1,p-1}}^{p-1} & \overbrace{\underline{V}_{p-1,n-p+1}}^{n-p+1} \\ \hline \underline{0} & \underline{T}_{m-p+1,n-p+1}^p \end{bmatrix} \begin{matrix} p-1 \\ m-p+1 \end{matrix} \rightarrow$$

$\begin{matrix} \vdots \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{m-p+1} \end{matrix} \xrightarrow{\quad} \underline{t}_{m-p+1}$

$$\underline{P}^T \cdot \underline{A}^p = \underline{A}^{p+1} = p \rightarrow \begin{bmatrix} \overbrace{\underline{U}_{p-1,p-1}}^{p-1} & \overbrace{\underline{V}_{p-1,n-p-1}}^{n-p-1} \\ \hline \underline{0} & \underline{T}_{m-p+1,n-p-1}^{p+1} \end{bmatrix}$$

$\begin{matrix} \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \xrightarrow{\quad} \underline{t}_1$

Figura 3.2 - PASSO  $p$  DA OBTENÇÃO DA MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR POR COLUNAS

Isto é conseguido através da reflexão do vetor  $\underline{t}_1$ , através da matriz  $\underline{P}$ , para uma das direções do subespaço  $(m-p+1)$  onde todas as componentes do vetor  $\underline{t}_1$  são nulas exceto uma delas. Veremos no próximo item os algoritmos deste processo.

As matrizes de rotação são utilizadas de maneira semelhante no processo de Givens.

### 3.2 - O MÉTODO DE HOUSEHOLDER

Podemos transformar a matriz  $\underline{S}$ , vista no Capítulo I, numa matriz triangular superior premultiplicando-a sucessivamente por matrizes ortogonais, de tal forma a anular os coeficientes  $s_{ij}$  (para  $i > j$ ). Como foi visto no ítem anterior, utilizamos para isto as matrizes de reflexão. Temos assim:

$$\underset{MM \times MM}{P_{n-1}^T} \cdot \underset{MM \times MM}{P_{n-2}^T} \cdots \underset{MM \times MM}{P_2^T} \cdot \underset{MM \times MM}{P_1^T} \cdot \underset{MM \times N}{S} = \begin{bmatrix} \underset{N}{\underline{U}} \\ \hline \underset{MM-N}{0} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

onde  $\underline{U}$  é uma matriz triangular superior. O produto das matrizes ortogonais  $\underline{P}_i$  é também uma matriz ortogonal  $\underline{Q}$ :

$$\underset{MM \times MM}{Q^T} \cdot \underset{MM \times N}{S} = \underset{MM \times N}{R^*} \quad (3.7)$$

ou

$$\underline{S} = \underline{Q} \cdot \underline{R}^*$$

sendo  $\underline{R}^*$  a matriz do segundo membro da equação (3.6).

As matrizes  $\underline{P}_i$  são construídas de tal forma que  $\underline{P}_i^T$  reduza a zero os elementos sob a diagonal na coluna  $i$  da matriz que está sendo operada. Temos então  $\tilde{\underline{P}}_i$  dado pela fórmula (3.3):

$$\underline{P}_i^T = \begin{bmatrix} \underline{I}_{i-1} & | & 0 \\ \hline 0 & | & \tilde{\underline{P}}_i \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

onde

$$\tilde{\underline{P}}_i = \underline{I} - \theta \cdot \underline{w}_i \cdot \underline{w}_i^T \quad ; \quad \theta = \frac{2}{\underline{w}_i^T \cdot \underline{w}_i}$$

Para o primeiro passo desta transformação, teremos:

$$\tilde{S} = P_1^T \cdot S \quad (3.9)$$

Se fizermos uma partição em  $\tilde{S}$ , como abaixo,

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} \tilde{s}_1 & \dots & \tilde{s}_1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

sendo  $\tilde{s}_1$  a primeira coluna de  $\tilde{S}$ , e aplicarmos (3.8), teremos:

$$P_1 = I - \theta \cdot \tilde{w}_1 \cdot \tilde{w}_1^T \quad (3.11)$$

Como o objetivo é zerar todos os elementos da coluna 1 exceto o primeiro (que é elemento da diagonal),  $P_1 \cdot \tilde{s}_1$  é um vetor onde apenas o primeiro elemento é não-nulo. Assim, de (3.11), temos:

$$(I - \theta \cdot \tilde{w}_1 \cdot \tilde{w}_1^T) \cdot \tilde{s}_1 = \pm ||\tilde{s}_1||_2 \cdot e_1 \quad (3.12)$$

onde  $||\tilde{s}_1||_2$  é dado pela equação (1.47), e  $e_1$  é um vetor unitário n-dimensional com 1 na primeira posição e zero nas demais.

Da relação anterior tiramos  $\tilde{w}_1$ :

$$\tilde{s}_1 - \theta \cdot \tilde{w}_1 \cdot \tilde{w}_1^T \cdot \tilde{s}_1 = \pm ||\tilde{s}_1||_2 \cdot e_1 \quad (3.13)$$

Fazendo  $\theta \cdot \tilde{w}_1^T \cdot \tilde{s}_1 = 1$ , uma vez que  $\tilde{w}$  é arbitrário (o que importa é a sua direção), teremos:

$$\tilde{w}_1 = \tilde{s}_1 + \text{ sinal } (s_{11}) \cdot ||\tilde{s}_1||_2 \cdot e_1 \quad (3.14)$$

O sinal é escolhido de tal forma que o valor absoluto do primeiro elemento de  $\tilde{w}_1$  é  $||\tilde{s}_1||_2$  maior que o valor absoluto de  $\tilde{s}_{11}$ .

Não precisamos calcular na prática as matrizes  $P_i$ . Calculamos  $\underline{v}_1^T$  e  $\tilde{\underline{S}}$  a partir daí :

$$\underline{v}_1^T = \underline{w}_1^T \cdot \underline{S} \quad (3.15)$$

$$\tilde{\underline{S}} = \underline{S} - \theta \cdot \underline{w}_1 \cdot \underline{v}_1^T \quad (3.16)$$

As equações (3.8), (3.14), (3.15) e (3.16) nos fornecem a matriz  $\tilde{\underline{S}}$  após o primeiro passo da triangularização. A repetição do processo nos fornecerá a matriz  $\underline{R}^*$  finalmente, e portanto, a matriz triangular superior  $\underline{U}$ . O fluxograma deste método é dado de forma simplificada abaixo.

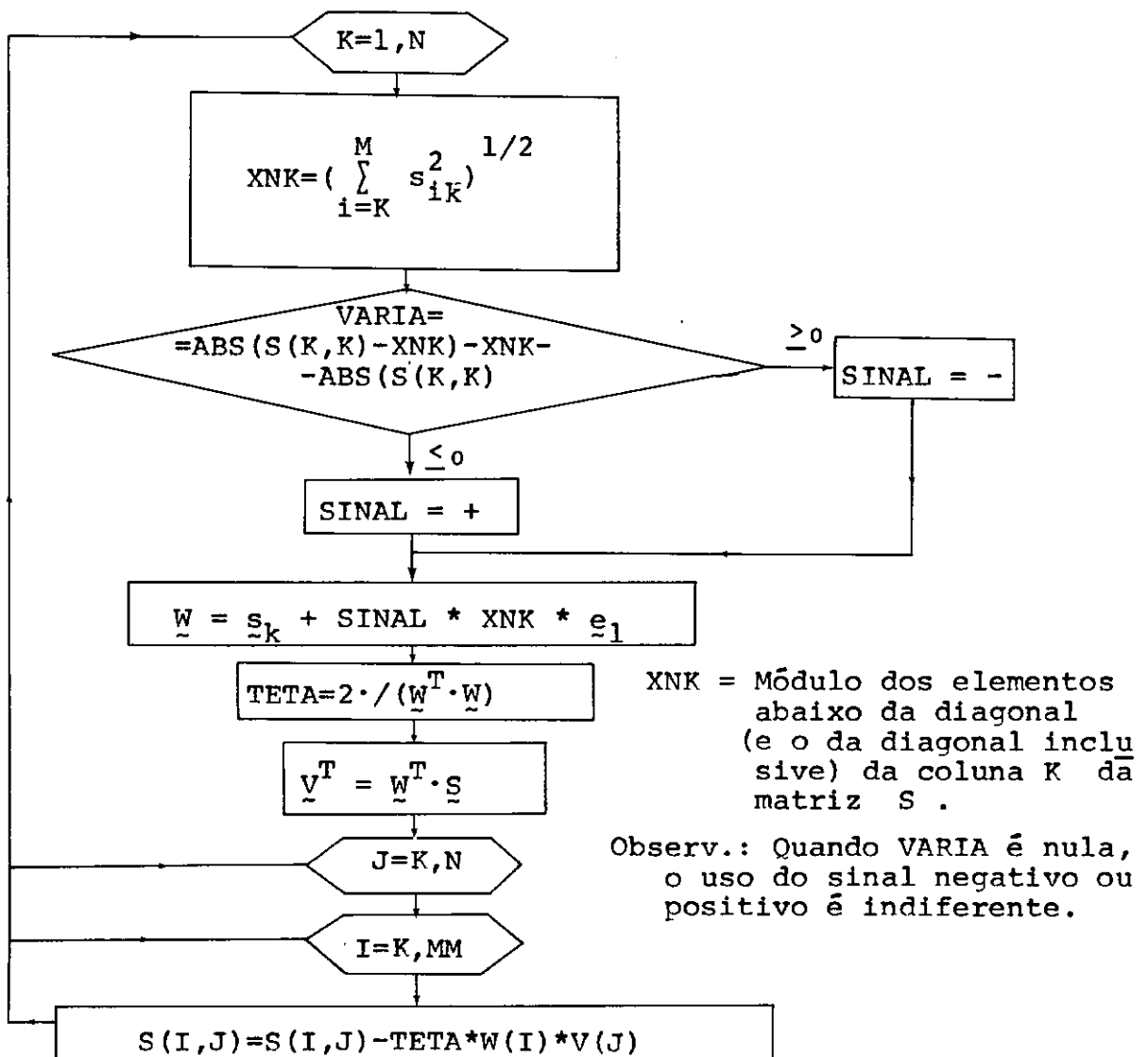


Fig. 3.3 - FLUXOGRAMA PARA A TRIANGULARIZAÇÃO PELO PROCESSO DE HOUSEHOLD

### 3.3 - O MÉTODO DE GRAM-SCHMIDT

O método de Gram-Schmidt é também um método de decomposição ortogonal, podendo ser utilizado para matrizes com  $MM$  equações e  $N$  incógnitas, para  $MM \geq N$  [14].

Podemos reescrever a equação (3.7) fazendo uma partição por colunas nas matrizes.

$$\begin{bmatrix} \underline{s}_1 & \underline{s}_2 & \dots & \underline{s}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{q}_1 & \underline{q}_2 & \dots & \underline{q}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ & \dots & \dots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Temos que  $s_{i1} = \sum_{k=1}^N q_{ik} \cdot u_{k1}$  e como  $u_{k1} = 0$

para  $k > 1$

$$+ s_{i1} = u_{11} \cdot q_{i1}$$

ou

(3.18)

$$\underline{s}_1 = u_{11} \cdot \underline{q}_1$$

Como  $\underline{q}_1^T \cdot \underline{q}_1 = 1$ ,  $u_{11}$  é a norma euclidiana do vetor  $\underline{s}_1$ . Portanto, podemos obter  $\underline{q}_1$  através da normalização do vetor  $\underline{s}_1$ . Assim, temos:

$$s_{i2} = \sum_{k=1}^N q_{ik} \cdot u_{k2} \text{ e como } u_{k2} = 0 \text{ para } k > 2$$

$$+ s_{i2} = q_{i1} \cdot u_{12} + q_{i2} \cdot u_{22}$$

ou

(3.19)

$$\underline{s}_2 = \underline{q}_1 \cdot u_{12} + \underline{q}_2 \cdot u_{22}$$

Premultiplicando a equação anterior por  $\underline{q}_1$ , obtemos:

$$\underline{q}_1^T \cdot \underline{s}_2 = \underline{q}_1^T \cdot \underline{q}_1 \cdot u_{22} + \underline{q}_1^T \cdot \underline{q}_2 \cdot u_{22}$$

mas

$$\underline{q}_1^T \cdot \underline{q}_1 = 1$$

$$u_{12} = \underline{q}_1^T \cdot \underline{s}_2 \quad (3.20)$$

$$\underline{q}_1^T \cdot \underline{q}_2 = 0$$

Podemos agora alterar o vetor  $\underline{s}_2$  obtendo  $\underline{s}_2^{(2)}$

tal que:

$$\underline{s}_2^{(2)} = \underline{s}_2 - u_{12} \cdot \underline{q}_1 \quad (3.21)$$

Podemos agora encontrar  $u_{22}$  a partir de  $\underline{s}_2^{(2)}$  de forma semelhante à obtenção de  $u_{11}$  a partir de  $\underline{s}_1$ .

O processo se repete de acordo com o fluxograma da figura (3.4) até obtermos a matriz  $\underline{R}^*$ .

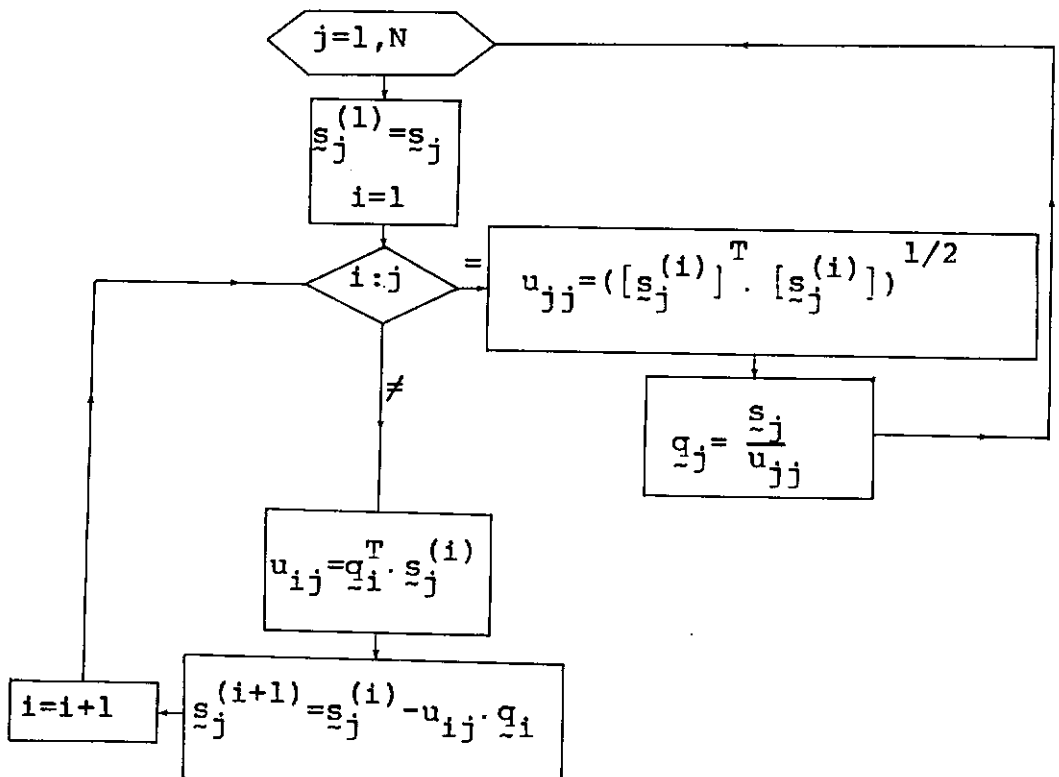


Fig. 3.4 - FLUXOGRAMA PARA TRIANGULARIZAÇÃO PELO PROCESSO DE GRAM-SCHMIDT



### 3.4 - COMPARAÇÕES, VANTAGENS E DESVANTAGENS

Os métodos de decomposição ortogonal para resolução de um sistema de equações são preteridos em casos normais (matrizes simétricas, em problemas estruturais bem condicionados) devido ao maior número de operações que exigem. Isto os torna antieconômicos. O método de Cholesky tem um quarto do número de multiplicações do método de Householder (e um oitavo do número de multiplicações do método de Givens) [12]. Ambos têm o mesmo número de raízes quadradas. Entretanto, de acordo com a mesma referência [12], os métodos ortogonais são mais estáveis porque servem para o tratamento de matrizes não definidas, não havendo a possibilidade de ocorrência de raiz quadrada de número negativo ou divisão por zero. A norma-2 da matriz é conservada durante as transformações.

No item (5.3.b) procura-se comprovar esta afirmação, comparando-se os resultados das operações efetuadas com as matrizes de Hilbert pelos métodos de Cholesky e Householder.

No caso de sistemas onde o número de equações é superior ao número de incógnitas, os processos de decomposição ortogonal têm grande aplicação.

Implementamos no programa de computador tanto o método de Householder quanto o de Gram-Schmidt. Neste último fez-se necessário o armazenamento da matriz  $Q$  numa área separada. A programação destes algoritmos, comparações e sugestões quanto à utilização de um e de outro, são encontrados nos capítulos subsequentes.

O método de Householder é apresentado nas referências [12] e [17] como aplicável em problemas onde é empregada a técnica de partição, ou hipermatrizes, como é chamada no sistema ASKA.

A estabilidade dos métodos ortogonais vem a se somar ao efeito da redução do número do condicionamento, conseguida através da montagem do fator  $S$  da matriz de rigidez, garantindo a aplicabilidade do método do fator natural a problemas mal condicionados.

O maior número de operações será compensado em vista da possibilidade de trabalharmos com precisão simples. Além disso, a rapidez crescente dos computadores digitais e a programação das rotinas de resolução em linguagem máquina permite uma utilização eficiente destes métodos.

## CAPÍTULO IV

### AS TÉCNICAS DE ARMAZENAMENTO

Para que possamos calcular grandes estruturas , faz-se necessário um estudo das técnicas de armazenamento computacional das matrizes estruturais. Neste trabalho apresentamos apenas os problemas ligados ao novo método. Um estudo mais geral foi feito no trabalho sobre "Técnicas de Armazenamento Computacional em Análise Estrutural" [27] , no qual são desenvolvidas também as formas de armazenamento diretamente ligadas ao método clássico.

No caso especial da matriz de rigidez estrutural, podemos aproveitar as características de simetria, além da propriedade de ser positiva definida, armazenando e trabalhando apenas com os coeficientes da semi-banda, ou faixa simétrica. Os algoritmos de triangularização de Gauss e de Cholesky são também desenvolvidos aproveitando estas características.

#### 4.1 - MATRIZES NÃO SIMÉTRICAS

Neste trabalho o problema que temos a resolver é o armazenamento do fator natural  $S$  da matriz de rigidez. Esta matriz é retangular ( $MM \times N$  ;  $MM > N$ ). Não existe aqui uma disposição dos coeficientes não nulos dentro de uma banda igual àquela da matriz de rigidez. Adotando algumas regras na numeração dos pontos nodais e dos elementos da estrutura, conseguimos que os coeficientes não nulos da matriz  $S$  se disponham ao longo da

diagonal do retângulo: Se quisermos armazenar a matriz triangularizada (o fator de Cholesky) na mesma área de  $S$ , estes coeficientes irão compor uma faixa ao longo da diagonal principal da submatriz ( $N \times N$ ).

Assim, os coeficientes não nulos ocupam, durante o processo de triangularização, uma banda de largura variável. As regras, o estudo e a preparação de algoritmos sobre esta técnica de armazenamento dos coeficientes de dentro da banda variável são tratados na primeira parte deste item.

No caso em que há dificuldades em se conseguir uma disposição dos coeficientes não nulos dentro de uma banda determinada e também no caso geral de uma distribuição bastante esparsa dos coeficientes não nulos, pode-se optar pela técnica de esparsidade, explicada na segunda parte deste item.

Permaneceu ainda no programa a opção de se montar e trabalhar com a matriz  $S$  de forma completa. Evidentemente esta forma é antieconômica, possibilitando a resolução de problemas com um número bastante limitado de graus de liberdade. Permaneceu apenas pela facilidade com que é programada, fornecendo uma visualização maior dos processos ortogonais aqui estudados e aplicados. O armazenamento é feito num arranjo unidimensional sequencialmente por colunas.

#### 4.1.a - A BANDA VARIÁVEL

Adotando-se as seguintes regras é quase sempre possível obtermos uma distribuição dos coeficientes não nulos de  $S$  dentro da área esquematizada na figura (4.1.a):

- A numeração dos elementos deverá acompanhar a numeração dos pontos nodais (Ver item 5.2.b).
- A diferença entre a numeração dos pontos nodais deverá ser a mínima possível (largura de faixa (LF) mínima).
- O maior afastamento (MA) entre a numeração dos elementos que contribuem para uma mesma direção deve ser mínimo.

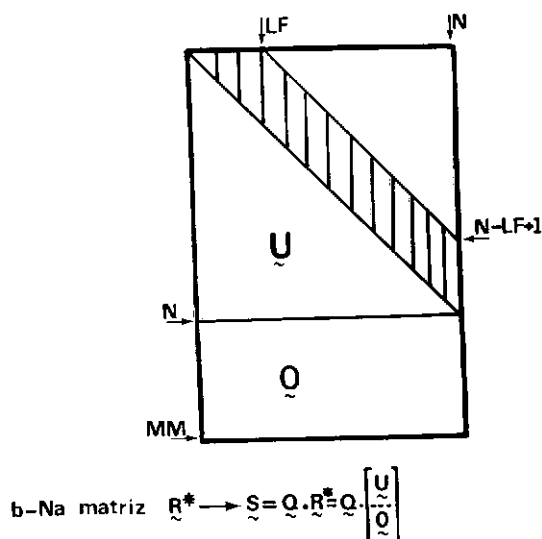
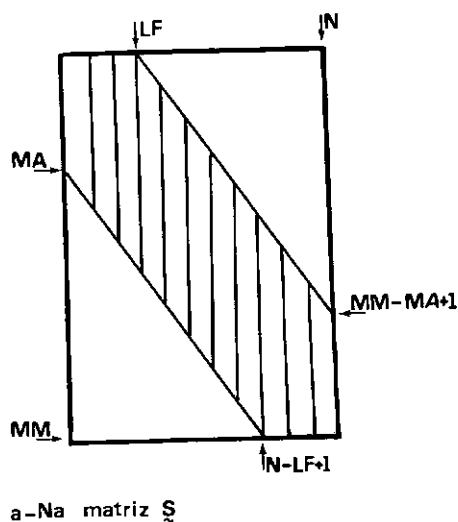


Fig. 4.1 - A DISTRIBUIÇÃO DOS COEFICIENTES NÃO NULOS

A matriz triangular superior  $\underline{U}$  tem seus coeficientes não nulos dentro da faixa hachureada da Fig. (4.1.b). Durante o processo de triangularização, os coeficientes não nulos ocupam a banda de largura variável esquematizada na figura (4.2)

que passamos a estudar em seguida. Trabalhamos aqui, supondo que cada linha de  $\underline{S}$  representa as contribuições de um elemento, como é o caso das treliças ( $MM=M$ ). Para os pórticos planos e elementos finitos triangulares, os algoritmos desenvolvidos deverão ser modificados, na parte referente à montagem.

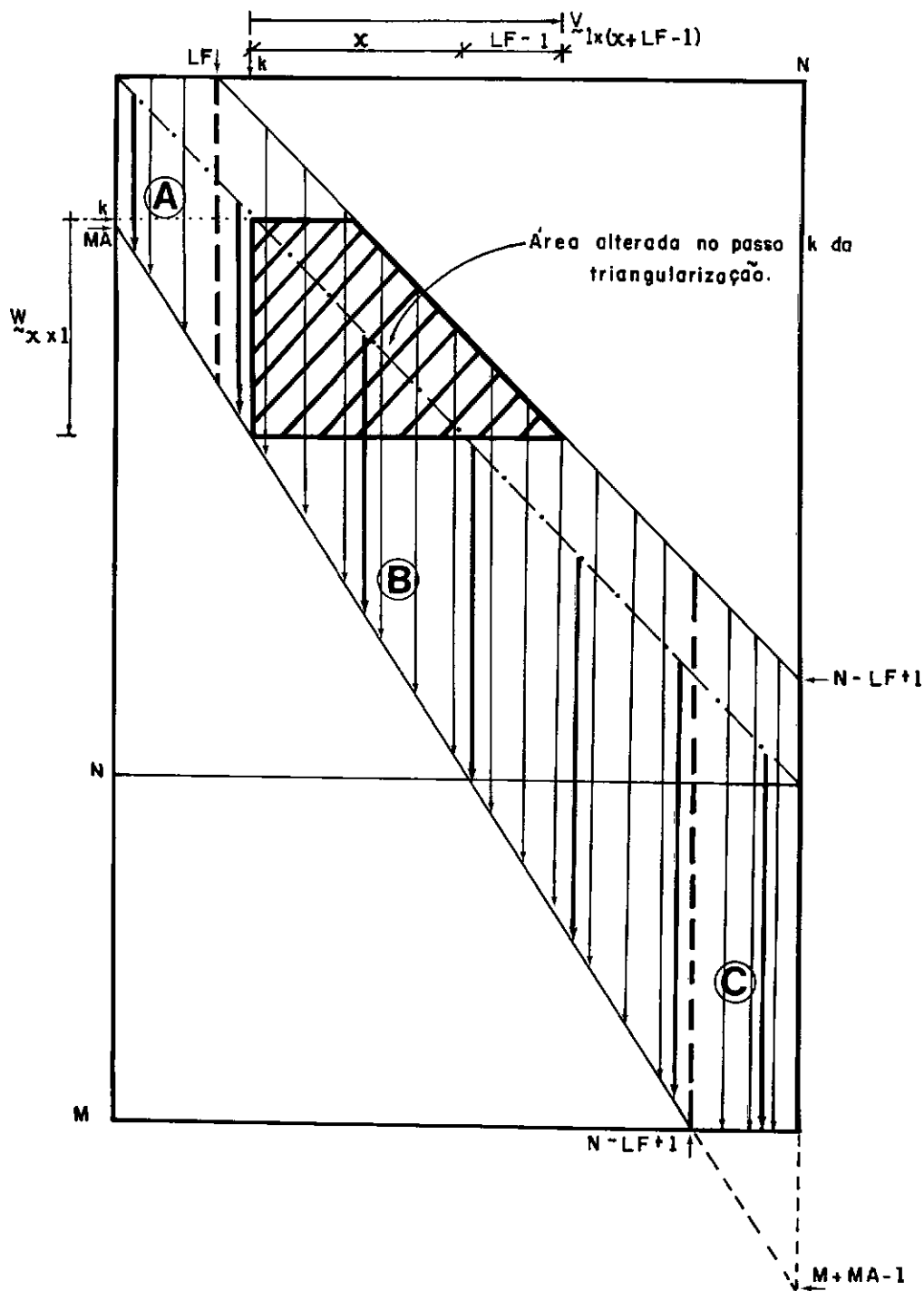


Fig. 4.2 - A BANDA VARIÁVEL

Os coeficientes são montados por coluna e se -  
quencialmente em  $\underline{S}$ . A banda fica dividida em três regiões de-  
terminadas pelos seguintes limites da coluna  $J$ :

Região A :  $1 \leq J \leq LF$

Região B :  $LF < J < N-LF+1$

Região C :  $N - LF + 1 \leq J \leq N$

MA e LF são determinados na rotina de montagem.

O vetor  $\underline{W}$  terá uma dimensão variável durante a triangularização de Householder. Podemos calcular, através de uma interpolação, quantas posições (x) terá o vetor  $\underline{W}$  na etapa k de triangularização ( $1 \leq k \leq N$ ) e com isto calcular até qual linha teremos elementos não nulos em  $\underline{W}$  (hachuras mais fortes na Fig. 4.2). Obtemos as seguintes relações entre x e k :

$$\left[ \begin{array}{ll} x = \frac{M-N}{N-1} (k-1) + MA & \text{para } 1 \leq k \leq N-LF+1 \\ x = M-k+1 & \text{para } N-LF+1 \leq k \leq N \end{array} \right. \quad (4.1)$$

A partir de (4.1) podemos calcular a última posição não nula do vetor  $\underline{W}$  (IFIMW), somando 'k-1' a 'x'. Esta é também a última posição de cada coluna dentro da banda variável.

$$\left[ \begin{array}{ll} IFIMW = (k-1) \cdot \frac{(M-1)}{(N-1)} + MA & \text{para } 1 \leq k < N-LF+1 \\ IFIMW = M & \text{para } N-LF+1 \leq k \leq N \end{array} \right. \quad (4.2)$$

O número de elementos de cada coluna (NEC) pode ser calculado subtraindo destes valores a posição inicial de cada coluna e somando 1 .

$$\left[ \begin{array}{ll} NEC = \frac{k-1}{N-1} \cdot (M-1) + MA & \text{para a região A} \\ NEC = \frac{(M-N)}{(N-1)} \cdot (k-1) + MA + LF-1 & \text{para a região B} \\ NEC = M-k+LF-1 & \text{para a região C} \end{array} \right. \quad (4.3)$$

Como trabalhamos com números inteiros, temos que somar mais uma unidade a estes valores calculados, de maneira que o arredondamento para baixo não invalide nossa técnica. Com isto, podemos montar nosso indicador (IND) da última posição armazenada de cada coluna. A partir da primeira, para a qual  $IND(1) = MA$ , temos:

$$IND(k) = IND(k-1) + NEC \quad (4.4)$$

O vetor  $\underline{v}$  no método de Householder é obtido como  $\underline{v} = \underline{w}^T \cdot \underline{s}$ . Como os coeficientes da matriz  $\underline{s}$  triangularizada (U) estarão dentro da área hachureada na Fig. (4.1.b), os coeficientes de  $\underline{s}$  que serão afetados pela multiplicação por  $\underline{w}^T$  serão apenas aqueles que estiverem dentro do trapézio hachureado da Fig. (4.2). Portanto, o vetor  $\underline{v}$  terá, no mínimo,  $(x+LF-1)$  posições e, no máximo,  $(N-k+1)$ . A área do trapézio é, portanto, também a área que será alterada no passo  $k$  da triangularização.

De posse do vetor  $\underline{IND}$ , a posição (IPOS) de qualquer coeficiente  $s_{ij}$  será dada, conforme a região, pelas relações abaixo.

$$\begin{cases} A - & IPOS = IND(j-1)+1 \\ B \text{ e } C - & IPOS = IND(j-1)+i-j+LF \end{cases} \quad (4.5)$$

Utilizando estes algoritmos podemos fazer a triangularização da matriz  $\underline{s}$  de maneira simples usando o método de Householder.

Esta técnica poderá ser otimizada para conseguir uma economia de posições na memória. Deixamos aqui algumas



sugestões com as possíveis dificuldades que surgirão para estas modificações.

- Ao invés de tomarmos o limite máximo superior definido pela largura de faixa, poderíamos armazenar apenas os coeficientes de cada coluna abaixo do primeiro não nulo, cuja linha seria indicada pelo indicador MAXH(j). Neste caso, a posição (IPOS) do coeficiente  $s_{ij}$  seria:

$$\text{IPOS} = \text{IND}(j-1) + i - \text{MAXH}(j) + 1$$

Com isto, economizaríamos a área hachureada (I) na figura abaixo.

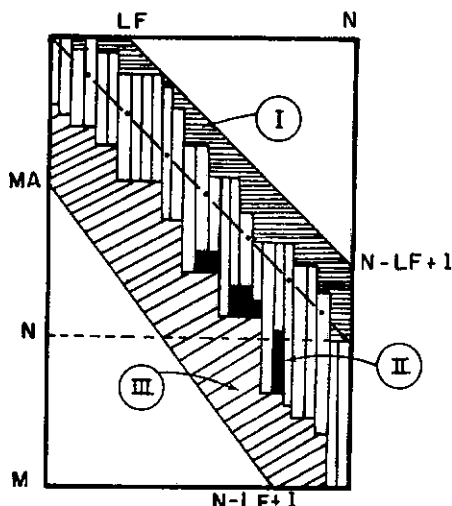


Fig. 4.3 - SUGESTÕES PARA A OTIMIZAÇÃO DA LARGURA VARIÁVEL

Entretanto, na implementação de tal armazenamento surgiriam dificuldades: qual seria o tamanho do vetor  $\underline{v}$ , ou seja, qual a área de  $\underline{S}$  deveria ser modificada no passo  $k$  da triangularização? A banda apresenta degraus sob a diagonal cujo aproveitamento é complicado. A área hachureada (II) entre os degraus pode receber influência das colunas anteriores mais "pro

fundas". O critério do "maior afastamento" (MA), como se vê na figura 4.3, pode levar a um dimensionamento muito antieconômico da matriz  $\underline{S}$ . A área hachureada (III) não é necessária.

- Uma partição em blocos de largura variável tornaria possível a resolução de problemas estruturais envolvendo um número de incógnitas teoricamente sem limites.

- A técnica do "Wave Front" aproveita a esparsidade da matriz e pode ser programada de tal forma que se consiga um acesso rápido aos dados.

#### 4.1.b - A TÉCNICA DE ESPARSIDADE

A técnica de esparsidade que descrevemos aqui é aplicável a qualquer tipo de matriz. Tanto mais útil será quanto menor for a porcentagem de coeficientes não nulos em relação ao total de coeficientes armazenados. Quando esta porcentagem se torna muito alta, a técnica deixa de ser a mais adequada, uma vez que exige áreas reservadas aos apontadores equivalentes às que são necessárias para o armazenamento dos próprios coeficientes, além de um grande número de testes para se operar com as matrizes assim guardadas.

Escolhemos a técnica dos dois apontadores. Na matriz  $\underline{S}$  armazenada por linhas, o indicador  $\underline{L1}$  indica as colunas dos coeficientes não nulos armazenados e  $\underline{L2}$  indica a posição em  $\underline{S}$  e  $\underline{L1}$  do primeiro coeficiente de cada linha. A

figura abaixo exemplifica como isto pode ser feito para o fator natural  $\underline{S}$  da treliça plana que aí se vê:

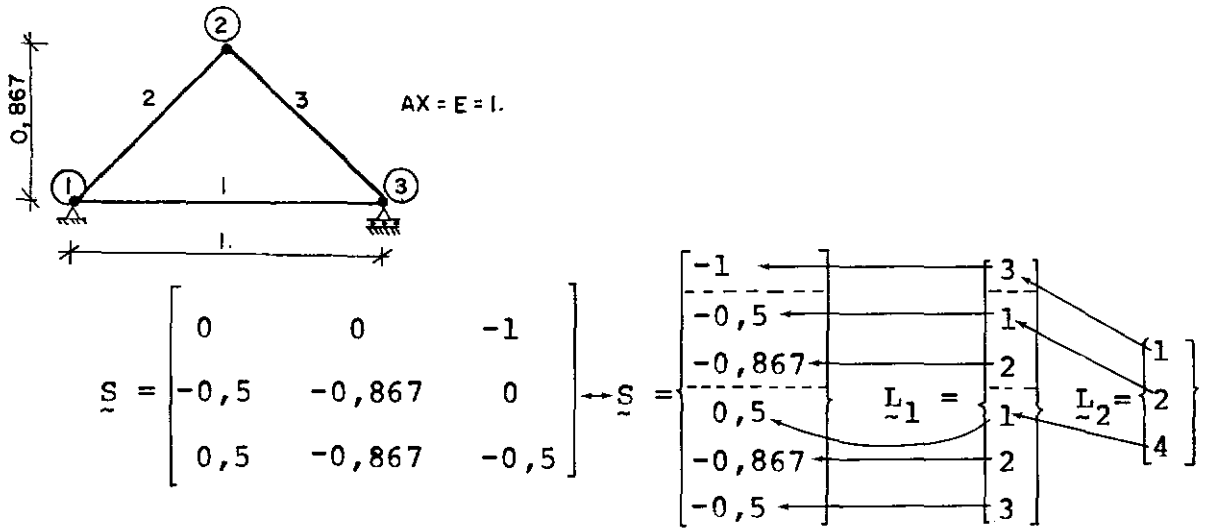


Fig. 4.4 - ARMAZENAMENTO PELA TÉCNICA DOS DOIS APONTADORES

Pela facilidade de acesso aos coeficientes na aplicação do algoritmo de Gram-Schmidt, a matriz  $\underline{S}$  é reordenada por colunas em  $\underline{SC}$  e seus apontadores passam a ser  $\underline{NLI}$ , indicando a linha de cada coeficiente, e  $\underline{IIC}$  indicando a posição, dentro de  $\underline{SC}$  e  $\underline{NLI}$ , onde inicia cada coluna. A mesma matriz  $\underline{S}$  da figura acima pode ser colocada como abaixo:

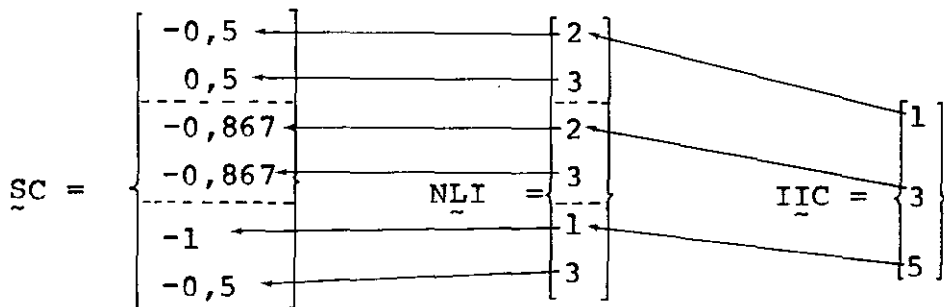


Fig. 4.5 - O FATOR  $\underline{S}$  POR COLUNAS

O aparecimento de elementos não nulos em posições anteriormente nulas, durante o processo de triangularização dificulta bastante a aplicação desta técnica, havendo necessidade de criar áreas de trabalho que armazenem temporariamente os coeficientes novos. Esta é a função das áreas MATRA (matriz de trabalho) e IVTI (vetor de trabalho) usadas na rotina TRIESP do programa.

Observa-se que o índice de não nulos cresce rapidamente durante o processo de triangularização (Ver resultados no Ítem 5.3.c). A área dentro da banda de largura variável torna-se praticamente repleta no caso em que os coeficientes se organizam inicialmente dentro da referida banda. Por isto, a técnica só se justifica em estruturas que, pela numeração, dêem origem a matrizes bastante esparsas. No entanto, para estruturas de tamanho médio (Ver limites nos quadros 5.1 e 5.2) a aplicação desta técnica tem um caráter geral e econômico. A maior aplicabilidade desta técnica depende de conseguirmos otimizar os algoritmos, da programação destes em computadores rápidos em linguagem máquina.

#### 4.2 - A ALTURA EFETIVA DE COLUNA

Esta técnica é bastante eficiente para armazenar matrizes de modo geral, sendo bem simples sua aplicação a matrizes simétricas. No programa, foi utilizada no armazenamento da matriz triangular superior  $\underline{U}$  (fator de Cholesky) obtida a partir da matriz  $\underline{S}$  (no caso em que se opta pela técnica de esparsidade, com a triangularização sendo feita pelo processo de Gram -

Schmidt).

Armazenam-se em  $\underline{U}$  os coeficientes de cada coluna a partir do primeiro elemento não nulo até os elementos da diagonal, sequencialmente, num arranjo unidimensional. A posição dos coeficientes da diagonal é fornecida pelo apontador IDIAG montado à medida em que os coeficientes de  $\underline{U}$  vão sendo calculados. A linha do primeiro elemento não nulo de cada coluna é calculada através de uma simulação da montagem da matriz de rigidez [7] , [27].

A posição (IPOS) de cada coeficiente  $u_{ij}$  é dada pela relação abaixo:

$$IPOS = IDIAG(j) - j + i \quad (4.6)$$

Na referência [27] encontram-se exemplos da aplicação desta técnica no armazenamento do fator de Cholesky, tendo-se mostrado mais econômica do que o tradicional armazenamento dos coeficientes de dentro de uma faixa de largura constante (Ver ítem 5.3.c).

## CAPÍTULO V

### IMPLEMENTAÇÃO DO PROGRAMA DE COMPUTADOR

#### 5.1 - DESCRIÇÃO GERAL

A automatização das técnicas apresentadas nos capítulos anteriores é de grande utilidade para a resolução dos problemas que ocorrem na prática, assim como serviu para aclarar detalhes vantajosos e mostrar quais os pontos que necessitam ser ainda aperfeiçoados. O objetivo não foi o de obter um programa específico para determinados tipos de estrutura, nem tampouco o de otimizar ao máximo todas as etapas da resolução do problema. Entretanto, o entendimento da programação facilita a aplicação da técnica a outro tipo qualquer de estrutura ou de análise. Os resultados obtidos e as comparações estabelecidas (item 5.3) só foram possíveis através da utilização do computador. Com isto, as idéias iniciais sobre as vantagens e desvantagens do método puderam ser comprovadas, permitindo-nos tirar as conclusões apresentadas no próximo capítulo.

O programa foi desenvolvido no computador Burroughs-6700 do Núcleo de Computação Eletrônica da UFRJ, em linguagem FORTRAN IV. A adaptação a outro tipo de computador exige apenas pequenas modificações. No computador utilizado, cada número real é representado através de 11 a 12 dígitos (6 bytes) em precisão simples e 22 a 23 em precisão dupla. O método utilizado tem a vantagem de poder ser implementado em computadores menores, nos

quais os números são representados através de um menor número de dígitos. As características do equipamento utilizado são fornecidas nos manuais da Burroughs [32].

Como exemplo de outros computadores onde o número real é representado através de um menor número de dígitos temos:

PDP - 7 dígitos em precisão simples e 17 dígitos em precisão dupla

IBM-1130 - 4 bytes (precisão simples) e 6 bytes (precisão estendida)

IBM-360/370 - 4 bytes em precisão simples

HP-2100 - 2 bytes em precisão simples

Nos microcomputadores o número real pode ser representado através da combinação de números inteiros, por exemplo:

- 1) Dois bytes destinados ao expoente e 2 bytes destinados à mantissa.
- 2) Através de números racionais: 2 bytes destinados ao numerador e 2 bytes destinados ao denominador.

Um maior ou menor número de bytes deverão ser reservados para os números reais de acordo com a precisão requerida. Quanto menor for o número de bytes requerido para a representação tanto maior será a quantidade de dados que poderão ser colocados simultaneamente na memória central (CPU). Vê-se aí

a vantagem da utilização do método do fator natural, através do qual pode-se ter na memória central quase o dobro do número de dados que no método clássico, para uma mesma precisão fixada para os resultados, diminuindo o número de transferências para a memória auxiliar [29].

Foram programados os elementos de treliça plana, de treliça espacial, de pórtico plano e ainda os elementos finitos triangulares de interpolação linear e quadrática para o estado plano de tensões e de deformações. Foram escolhidos pela simplicidade que apresentam tanto para o estudo do método quanto para a programação em si, assim como, pela familiaridade que já se tem com o tratamento destes elementos pelo método clássico. A obtenção do fator de Cholesky pode ser feita por Householder ou Gram-Schmidt. Para o primeiro fez-se uso do armazenamento da matriz toda (colocada num arranjo unidimensional), sendo que para as treliças deixou-se a opção da técnica de armazenamento em banda variável, bastante econômica. No método de Gram-Schmidt a técnica de armazenamento é a de esparsidade, com dois apontadores, para a matriz  $S$  e a altura efetiva de coluna para a matriz  $U$ . Os elementos finitos triangulares foram programados apenas desta segunda forma.

O programa desenvolvido ficou limitado a resolver problemas estruturais relativamente pequenos. As dimensões das matrizes e vetores do programa (Ver listagem) podem ser ampliados dentro dos limites estabelecidos aproximadamente no quadro (5.1). Para estruturas maiores há necessidade de que as formas de armazenamento implementadas sejam aperfeiçoadas e de que as



matrizes sejam tratadas de forma particionada com armazenamento em memória auxiliar. Os limites máximos aqui apresentados não foram usados, sendo que, para o programa como está, temos os limites fixados na própria listagem.

ELEMENTO	TÉCNICA DE ARMAZENAMENTO		
	MATRIZ COMPLETA (M x N)	ESPARSIDADE (M x $\bar{b}$ )	BANDA VARIÁVEL (M x $\bar{b}$ )
TRELIÇAS	64000	64000	64000
PÓRT.PLANO	21300	21300	-
ELEM.FIN. TRIANG.CST	-	21300	-
ELEM.FIN. TRIANG.LST	-	7100	-

Quadro 5.1 - CAPACIDADE MÁXIMA DO PROGRAMA

(Obs.: M = número de elementos da estrutura; N = número de graus de liberdade da estrutura. Os espaços vazios indicam que a técnica não foi implementada para o elemento correspondente).

Para fixarmos os limites acima é necessário estabelecermos a definição da largura da banda média ( $\bar{b}$ ). Assim, temos:

$$\bar{b} = \frac{\sum_{i=1}^{MM} b_i}{MM}$$

onde  $b_i$  é a largura de banda da linha  $i$  do fator natural  $\underline{S}$  e MM é o número de linhas de  $\underline{S}$ .

A resolução de um problema estrutural foi divi-

dida logicamente de maneira a facilitar a compreensão, detecção de erros, avaliação de tempos gastos e possibilitar a utilização de etapas comuns às diversas aplicações. Temos assim a seguinte divisão geral:

- a) Especificação do problema e da técnica pela qual será resolvido.
- b) Leitura das características gerais da estrutura, coordenadas, propriedades físicas e geométricas e restrições nodais.
- c) Leitura do carregamento.
- d) Montagem do fator natural da matriz de rigidez estrutural (S)
- e) Resolução, ou seja, obtenção dos deslocamentos nodais.
- f) Cálculo das forças e tensões nos elementos e reações de apoio.

A programação é constituída das seguintes subrotinas:

- I) LER - Com a função de ler os dados.
- II) AUTOM - Com a função de gerar automaticamente os dados.
- III) MONTAG - Montagem da matriz S total ou em banda variável (num vetor).
- IV) CONDIC - Calcular o número de condicionamento da matriz de rigidez.
- V) INVER - Rotina necessária à CONDIC para inverter a matriz de rigidez estrutural.
- VI) PRODUT - Rotina necessária à CONDIC para calcular o produto de matrizes.
- VII) MONESP - Montagem na matriz S apenas dos coeficientes não nulos pelas técnicas de esparsidade.

- VIII) AEC - Cômputo da posição do primeiro elemento não nulo de cada coluna da matriz de rigidez para o armazenamento em U por altura efetiva de coluna.
- IX) TRIESP - Triangularização de S por Gram-Schmidt com técnicas de esparsidade.
- X) TRIANG - Triangularização da matriz S por Householder.
- XI) RESOL - Resolução final do problema, cálculo e impressão dos resultados (deslocamentos, forças, tensões e reações).

Existem ainda as seguintes rotinas específicas para pórticos planos:

- XII) RERE - Calcula a matriz de rigidez do elemento (reto).
- XIII) SMRD - Calcula a matriz SMR do elemento.
- XIV) CAPEM - Calcula as ações de engastamento perfeito nas extremidades dos membros.
- XV) EQLOD - Calcula as cargas nodais equivalentes.
- XVI) SOLRE - Calcula as solicitações nas extremidades dos elementos e as reações de apoio da estrutura.

e as seguintes para os elementos finitos triangulares:

- XVII) BCST - Cálculo da matriz B para o elemento CST.
- XVIII) CDTCST - Cálculo das deformações e tensões no elemento CST.
- XIX) FILST - Cálculo da matriz  $\psi$  em coordenadas triangulares para o LST.
- XX) CDTLST - Cálculo das deformações e tensões no elemento LST.

Estas rotinas são chamadas pelo programa principal ou pelas subrotinas de acordo com o fluxograma que se segue (Fig. 5.1). Nele e no programa, o elemento e a técnica de análise são definidos por números, de acordo com o quadro 5.2. O nú

mero de elementos (M), de nós (NJ), de direções restringidas (NR), de nós restringidos (NRJ) e de nós carregados diretamente (NLJ) são também lidos no programa principal. ITE é o índice que indica o tipo de elemento de que estará constituída a estrutura. ITEC é o indicador da técnica de armazenamento a ser utilizada. ICOND indica se o número de condicionamento da matriz de rigidez deverá ser calculado ou não.

ITE : ELEMENTO	ITEC: TÉCNICA DE ARMAZENAMENTO	ICOND: CALCULA O Nº DE CONDICION.
1 - TRELIÇA PLANA	1 - MATRIZ TOTAL	1 - SIM
2 - TRELIÇA ESPACIAL	2 - COEFICIENTES NÃO NULOS (ESPARS.)	0 - NÃO
3 - PÓRTICO PLANO	3 - BANDA VARIÁVEL	
4 - TRIANGULAR COM INTERPOLAÇÃO LINEAR (EST.PL.DE DEFORMAÇÃO)		
5 - TRIANGULAR COM INTERPOLAÇÃO LINEAR (EST.PL.DE TENSÕES)		
6 - TRIANGULAR COM INTERPOLAÇÃO QUADRÁTICA (E.P.DE FORMAÇÕES)		
7 - TRIANGULAR COM INTERP. QUADR. (E.P. TENSÕES)		

Quadro 5.2 - ÍNDICES DO PROGRAMA

As notações utilizadas no programa estão definidas em comentários dentro da própria listagem apresentada no Apêndice deste trabalho.

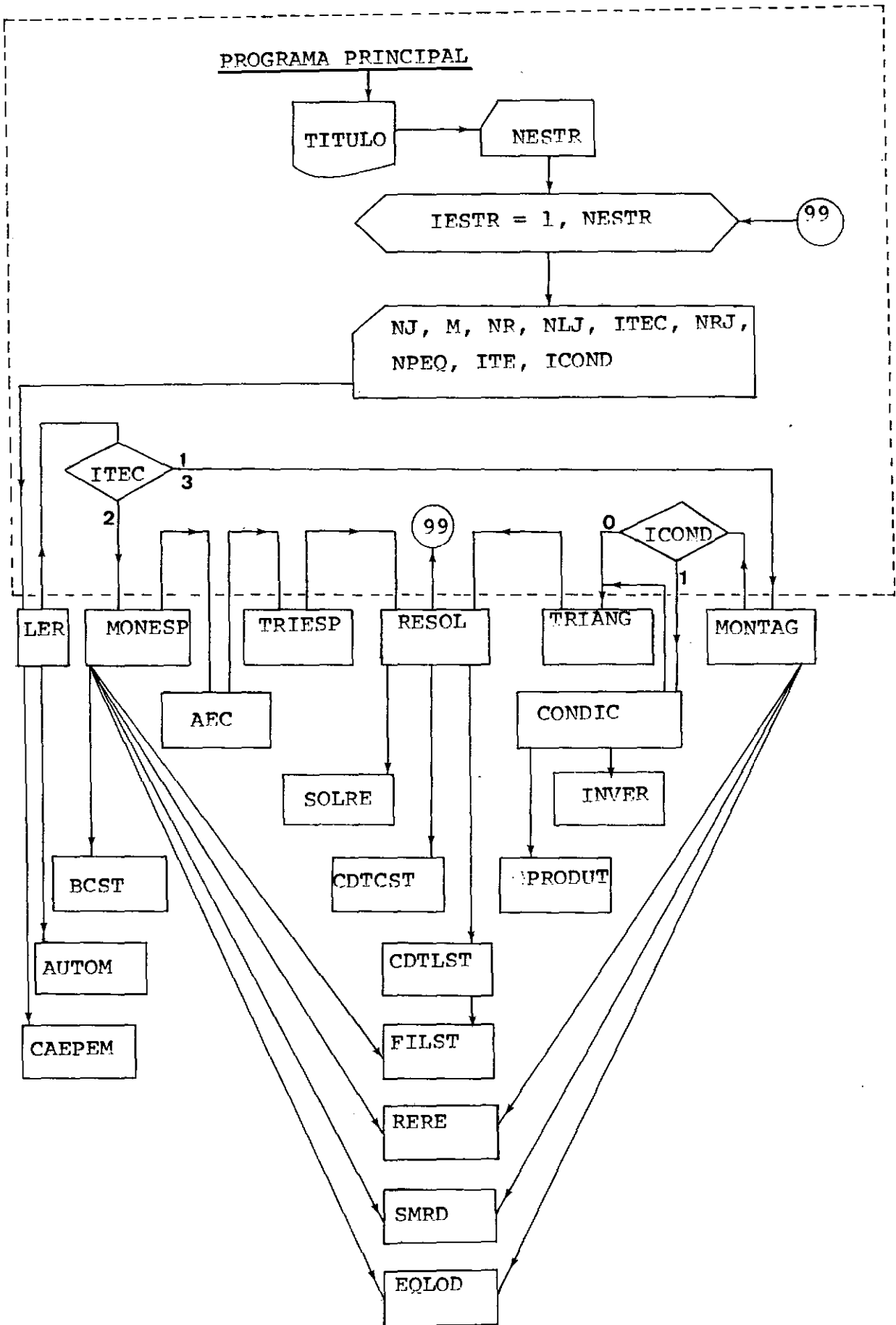


Fig. 5.1 - FLUXOGRAMA GERAL DO PROGRAMA

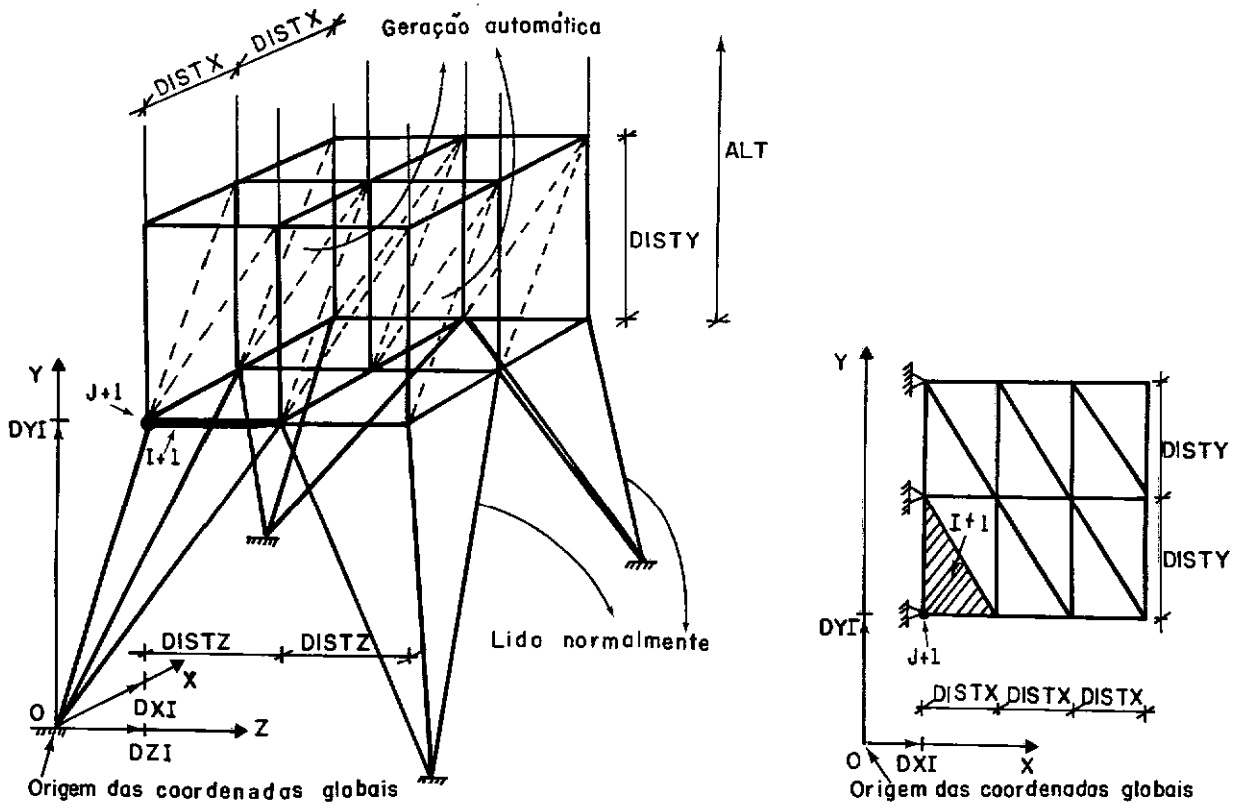
## 5.2 - AS SUBROTINAS

### 5.2.a - LEITURA, GERAÇÃO E ENTRADA DE DADOS

Apenas os dados sobre as características básicas da estrutura são lidos no programa principal. Isto possibilita a utilização de dimensionamentos ajustáveis para as matrizes e vetores, tanto nestas subrotinas quanto nas demais, com exceção de alguns arranjos passados através da declaração COMMON. Através desta subrotina é feita a leitura das coordenadas dos pontos nodais, das incidências dos elementos e das propriedades físicas e geométricas da estrutura.

Para as treliças espaciais e elementos finitos triangulares (CST e LST) deixou-se paralelamente a opção de que estes dados sejam total ou parcialmente gerados automaticamente na subrotina AUTOM. No diagrama 5.2 são esquematizadas as malhas que podem ser geradas automaticamente através da referida subrotina. As características das malhas são lidas em cartão.

Para as treliças são lidos o módulo de Young, assim como a seção transversal juntamente com a incidência de cada elemento. Para pórticos planos são lidas ainda as inércias dos elementos. Para os elementos finitos triangulares são necessários o módulo de Young, o coeficiente de Poisson e a espessura de cada um.



I- Treliza espacial: NUCOX=NUCOZ= 3

II- Elemento finito triangular (CST e LST):

NUPOX = 4 ; NUPOY = 3

Fig. 5.2 - MALHAS GERADAS AUTOMATICAMENTE

A subrotina AUTOM pode ser facilmente ampliada e desenvolvida para outros tipos de malha e para os demais elementos implementados. Contudo, neste trabalho, a finalidade desta rotina foi apenas a de facilitar os testes em estruturas maiores.

A leitura das restrições nodais é feita da mesma forma para os diversos elementos sendo que as direções 1 e 2 correspondem às direções X e Y respectivamente. Para as treliças espaciais, a direção 3 corresponde à direção Z, enquanto que para os pórticos planos corresponde à rotação do eixo da barra junto ao ponto nodal no plano XY. O número de nós restringidos (NRJ) indica o número de cartões sobre as restrições nodais a

serem lidos em formato livre onde o primeiro índice é o número do nó e as restrições serão indicadas pelo algarismo 1 na posição restringida (0 = direção livre).

Apenas as estruturas de pórtico plano poderão receber outro tipo de carregamento além das cargas aplicadas diretamente nos nós. Para as demais, a conversão das cargas aplicadas nos elementos em cargas nodais equivalentes deverá ser feita externamente ao programa.

A subrotina CAPEM será chamada para cada elemento de pórtico plano em que houver carga ou momento concentrado, carga distribuída uniformemente, de forma triangular ou trapezoidal, calculando e imprimindo as ações de engastamento perfeito nas extremidades destes elementos (no sistema local de referência). Deixou-se também a opção de entrar diretamente com as ações de engastamento perfeito nas extremidades dos elementos. Subrotinas semelhantes poderão ser feitas para os demais elementos, possibilitando uma maior e mais fácil aplicação do programa.

Todos os dados, lidos ou gerados, são impressos para facilitar a conferência ou alteração dos mesmos.

Apresentamos em seguida os formatos de entrada e a sequência de cartões de dados, inclusive os do programa principal. Quando nada for indicado quanto ao formato é porque trata-se de formato livre do FORTRAN do Burroughs-6700, podendo os dados inteiros ou reais ocupar o campo que lhes for necessário, delimitado por vírgulas. Caso contrário, o formato encontra-se



entre parênteses. Cada item ou subitem indica um cartão.

- 1 - Número de estruturas a serem calculadas: NESTR
- 2 - Observações sobre a estrutura: OBS (1 cartão)
- 3 - Dados gerais: Número de nós (NJ), número de elementos (M) , número de direções restringidas (NR), número de nós com carga aplicada (NLJ), técnica de resolução (ITEC), número de nós que têm pelo menos uma restrição (NRJ), número pequeno (NPEQ), tipo de estrutura (ITE), indicador para calcular ou não o número de condicionamento (ICOND).
- 4 - Dados particulares da estrutura:
  - 4.1) Número de gerações diferentes: NGD
  - 4.2.a) Quando há geração automática:
    - 4.2.a.1) Número de nós cujas coordenadas são lidas (NJL), número de membros cujas incidências e propriedades são lidas (ML).
    - 4.2.a.2) -Para treliças espaciais: Distância entre os pontos nodais nas direções X (DISTX), Y (DISTY) e Z (DISTZ), número de pontos nodais nas direções X (NUCOX) e Y (NUCOY), altura (ALT), número de tipos de elementos diferentes (ITIP), nó (J) e elemento (I) anteriores à geração, distâncias iniciais a partir da origem nas direções X (DXI), Y (DYI), Z (DZI), módulo de elasticidade (ELAST), seção transversal (AREA).
  - Para elementos finitos triangulares: DISTX, DISTY, número de pontos nas direções X (NUPOX) e Y (NUPOY), J, I, DXI, DYI, coeficiente de Poisson (POISS), espessura do elemento (ESPES), ELAST.

Obs.: O item (4.2.a) será repetido NGD vezes.

4.2.b) Quando não há geração automática faz-se internamente  $ML=M$ . Caso contrário, são lidos agora  $ML$  cartões , para cada elemento  $I$ :

- Treliças: número do elemento ( $I$ ), nó inicial ( $NOP(I,1)$ ), nó final ( $NOP(I,2)$ ), seção transversal ( $AX(I)$ ), módulo de elasticidade ( $E(I)$ ).
- Pórticos planos:  $I$ ,  $NOP(I,1)$ ,  $NOP(I,2)$ ,  $AX(I)$ ,  $E(I)$ , momento de inércia ( $IZ(I)$ ).
- Elementos finitos triangulares:  $I$ ,  $NOP(I,1)$ ,  $NOP(I,2)$ ,  $NOP(I,3)$ , espessura do elemento ( $ESP(I)$ ),  $E(I)$  ,  $POIS(I)$ . (Para o LST teríamos:  $NOP(I,4)$ ,  $NOP(I,5)$ ,  $NOP(I,6)$ ).

4.3)  $NRJ$  cartões contendo as restrições do nó  $J$  ( $1=$ restrito;  $0=$ livre):

- Treliças planas e elementos finitos triangulares:  
 $J, RL(J)^1, RL(J)^2$

Obs.: 1 e 2 referem-se às direções  $X$  e  $Y$  do nó  $J$ .

- Treliças espaciais e pórticos planos:  $J, RL(J)^1, RL(J)^2, RL(J)^3$ .

Obs: 3 refere-se à direção  $Z$  ou à rotação na extremidade.

5) Leitura do carregamento:

5.a) Treliças planas e elementos finitos triangulares, cargas nodais:  $J, AC(J)^1, AC(J)^2$ .

5.b) Treliças espaciais:  $J, AC(J)^1, AC(J)^2, AC(J)^3$

Obs: São lidos  $NLJ$  cartões nos itens 5.a e 5.b.

5.c) Pórticos planos:

5.c.1) Número de elementos cujas cargas foram substituídas

por ações de engastamento perfeito em seus extremos:

NLM (Formato I5), número de elementos carregados:

NLMC (Formato I5).

5.c.2) Cargas no nó K nas direções X,Y ou momento Z :

K(I5), A1(F10.3), A2(F10.3), A3(F10.3).

5.c.3) Caso NLMC  $\neq$  0

- Número do elemento: I(I5); número de cargas; NC(I5)
- Código do tipo de carga: ICOD(I5)
- Força concentrada: F(F10.5); distância da extremidade inicial até o centro geométrico do carregamento: A(F10.5); distância da extremidade final até o centro geométrico do carregamento: B(F10.5); momento aplicado: MA(F10.5); valor da carga no início e no fim de um carregamento distribuído: Q1(F10.5) , Q2(F10.5); largura do carregamento: S(F10.5); carga concentrada longitudinal; T(F10.5).

Obs: Estes dois últimos itens são repetidos NC vezes.

5.c.4) Caso NLM  $\neq$  0 , serão lidos NLM cartões contendo o número do membro: I(I5); as ações de engastamento perfeito nas extremidades do elemento nas direções 1, 2 e 3 respectivamente: AMLJ1 (F10.3), AMLJ2(F10.3), AMLJ3(F10.3), AMLK1(F10.3), AMLK2(F10.3), AMLK3(F10.3).



### 5.2.b) A MONTAGEM DO FATOR NATURAL DA MATRIZ DE RIGIDEZ

Uma vez de posse dos dados referentes à estrutura, o fator natural da matriz de rigidez pode agora ser montado diretamente. No programa, todos os elementos abordados, com exceção do LST, podem ter o fator natural de suas matrizes de rigidez formulado explicitamente, conforme visto no primeiro ítem do Capítulo II. A montagem da matriz  $\underline{S}$  consiste simplesmente em calcular a contribuição de cada elemento (os coeficientes de seu fator natural  $\underline{F}_i$ ) e sua posição dentro de  $\underline{S}$  (o grau de liberdade da estrutura).

Montamos somente os coeficientes referentes às direções livres dos nós. Em qualquer das três técnicas de armazenamento referidas na descrição geral do programa, os coeficientes são calculados da mesma forma. Quando se armazena a matriz completa (técnica nº 1), os coeficientes de  $\underline{S}$  são colocados sequencialmente, por colunas, dentro de um arranjo unidimensional onde a posição do coeficiente  $s_{ij}$  é dada pelo seguinte apontador:

$$IPOS = (J-1)*MM+I \quad (5.1)$$

onde  $MM=M$  para as treliças e  $MM=3*M$  para pórticos planos. Os elementos finitos triangulares não foram programados nem por esta técnica nem pela 3ª técnica, a de banda variável, apenas disponível para as treliças. Tanto a 1ª quanto a 3ª técnica estão dentro da subrotina MONTAG.

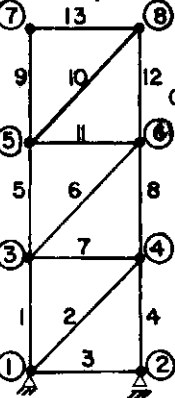
A técnica de montagem dos coeficientes não nulos (ou parte deles) está programada em MONESP. Inicialmente os

coeficientes são montados por linhas em  $\underline{S}$  utilizando os apontadores  $\underline{L1}$  para as colunas dos coeficientes e  $\underline{L2}$  para a posição dentro de  $\underline{S}$  e  $\underline{L1}$  do primeiro coeficiente não nulo de cada linha. Isto foi feito assim porque esta é a forma natural de buscarmos os elementos e seus respectivos graus de liberdade dentro do "DO" da montagem. Como, entretanto, na triangularização pelo método de Gram-Schmidt trabalha-se por colunas o fator natural da matriz de rigidez estrutural é rearranjado sequencialmente por colunas, em  $\underline{SC}$ , utilizando os apontadores  $\underline{NLI}$  para o número da linha e  $\underline{IIC}$  para a posição dentro de  $\underline{SC}$  e  $\underline{NLI}$  do primeiro coeficiente não nulo de cada coluna.

Para que a técnica da banda variável seja empregada, a numeração dos elementos deverá acompanhar a numeração dos pontos nodais. Caso contrário, teríamos uma disposição da banda como a da figura 5.4, impossibilitando a aplicação da técnica.

Mesmo que sejam obedecidos os critérios estabelecidos no item 4.1.a, em estruturas "fechadas" encontra-se uma especial dificuldade em encontrar a numeração adequada. Apesar da primeira numeração da figura 5.5 ainda dar aos coeficientes da matriz  $\underline{S}$  uma disposição em banda, esta terá uma grande largura e os elementos que contribuem para uma mesma direção estarão bastante separados (grande  $LF_{\max}$  e  $MA_{\max}$ ). Neste caso, a opção do armazenamento por técnicas de esparsidade é mais vantajosa. O quadro 5.3 sugere a melhor técnica em cada caso específico (2 = esparsidade; 3 = banda variável), dentro do que está disponível no programa, em relação às treliças.

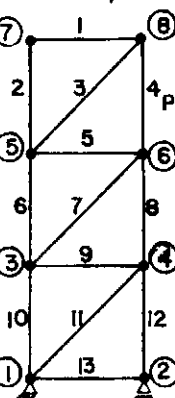
Numeração correta



Configuração da banda



Numeração incorreta

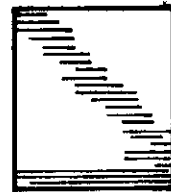
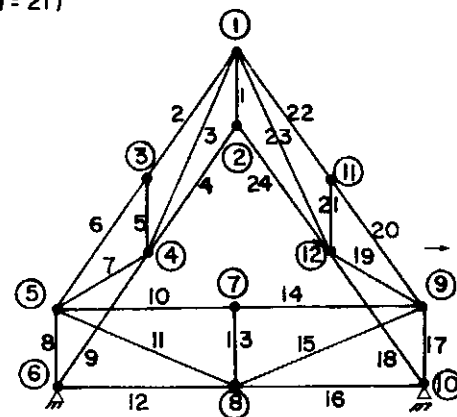
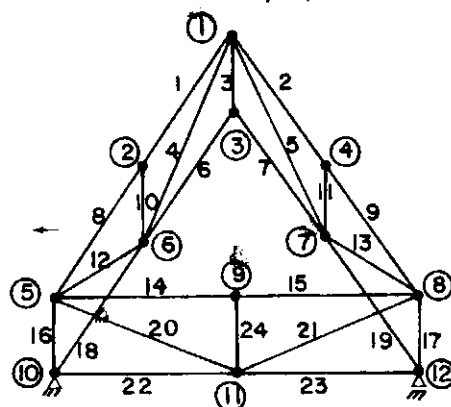


Posição incorreta da banda



Fig-5-4- Numeração adequada dos elementos da treliça plana para a técnica de banda variável.  
( $M=13; N=13$ )

Treliça plana ( $M=24; N=21$ )



Chapa quadrada com furo discretizada em elementos finitos triangulares ( $M=72; N=48$ )

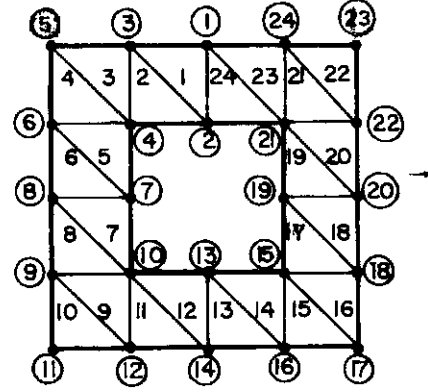
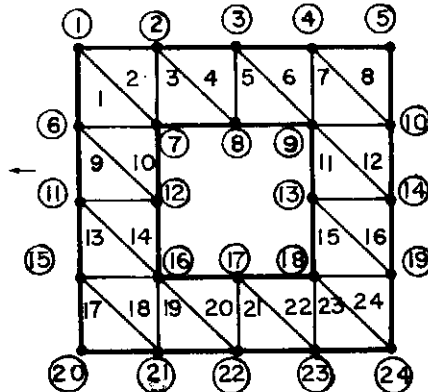


Fig-5-5- A relação entre a numeração e o tipo da banda.

Para (MxN) máx. até	40.000				200.000
Para N até	100		200		400
Largura de banda média (b) até	40	100	80	200	120
Técnica indicada	3	2	3	2	3

Quadro 5.3 - A OPÇÃO ENTRE AS TÉCNICAS (Obs:  $M \geq N$ )

Além das informações fornecidas pelo quadro acima, resta comentar que o cálculo do número de condicionamento da matriz de rigidez da estrutura só se encontra disponível quando esta for montada de forma completa (técnica 1). Para uma estrutura discretizada em elementos finitos triangulares, este cálculo não poderá ser feito pelo programa, pois somente a técnica de esparsidade está disponível para este tipo de elemento. Para os pórticos planos, quando não for necessário calcular o número de condicionamento, a técnica de esparsidade é também sempre mais indicada do que a montagem completa de  $\underline{S}$ . (Para limites máximos nestes casos, ver quadro 5.1) .

As subrotinas de montagem MONTAG e MONESP têm, por sua vez, acesso às subrotinas RERE, SMRD e EQLD, necessárias para a resolução dos problemas de pórtico plano. O cálculo da matriz de rigidez dos elementos de eixo reto e seção constante é feito em RERE. Esta matriz,  $\underline{SM}_{6 \times 6}$ , é em seguida pós-multiplicada pela matriz de rotação  $\underline{R}_{6 \times 6}$ , e o resultado,  $\underline{SMR}_{6 \times 6}$ , é gravado no disco pois será necessário na etapa final para o cálculo das solicitações nas extremidades dos elementos. O cálculo das ações nodais equivalentes é feito, logo em seguida, na roti-



na EQLOD, uma vez que as matrizes de rotação para cada elemento já foram calculadas. O vetor  $\underline{AE}$  de ações equivalentes é obtido através da multiplicação das matrizes de ações iniciais nas extremidades dos elementos  $\underline{AML}$  pelas matrizes de rotação, respectivas  $\underline{R}$ . Depois, na própria rotina de montagem, obtém-se o vetor de forças nodais equivalentes  $\underline{AC}$ , soma das ações  $\underline{AE}$  com as cargas  $\underline{A}$  aplicadas diretamente nos nós. Os valores iniciais das reações de apoio da estrutura de pórtico plano são também aí calculados.

Os elementos finitos triangulares para o estado plano de deformação seguem o mesmo processo de montagem daqueles para o estado plano de tensão. A única diferença é que, internamente, modificam-se seus módulos de elasticidade e coeficientes de Poisson de acordo com as relações (2.26). A subrotina MONESP, onde está programada a montagem destes elementos, calcula a área e as distâncias nas direções X e Y entre os pontos nodais, passando estes valores à rotina BCST onde é feito o cálculo e gravação no disco da matriz  $\underline{B}$  para os elementos CST. A matriz  $\underline{B}$  será necessária na etapa final para a avaliação das deformações e tensões nos elementos. No caso dos elementos finitos triangulares LST faz-se necessária a avaliação da matriz  $\underline{\psi}$  em FILST.

A subrotina AEC é utilizada apenas no caso de ser feita a montagem pela técnica de esparsidade. Nela, através de uma montagem simulada da matriz de rigidez estrutural [7], calculam-se as linhas a partir das quais existem coeficientes não nulos dentro de cada coluna da matriz de rigidez. Isto é necessário porque, neste caso, o fator de Cholesky  $\underline{U}$  é montado se-

quencialmente por colunas, armazenando-se apenas os coeficientes a partir da referida linha calculada em AEC (Ver ítem 4.2).

### 5.2.c - OBTENÇÃO DO FATOR DE CHOLESKY E CÁLCULO DOS DESLOCAMENTOS NODAIS

Sendo a matriz  $\underline{S}$  uma matriz retangular ( $MM \geq N$ ) temos que empregar agora as transformações ortogonais, estudadas no Capítulo IV, para obter o fator de Cholesky e, através dele, encontrar os deslocamentos nodais. As rotinas que fazem isto no programa são a TRIANG e a TRIESP.

Quando a matriz  $\underline{S}$  tiver sido montada de forma completa ou em banda variável, em MONTAG, ela terá de ser triangularizada em TRIANG. Nesta rotina, a matriz  $\underline{S}$  será operada utilizando o método de Householder para obter a matriz triangular superior de ordem  $N$  (Fator de Cholesky) (Ver Fig. 3.3). Esta ocupará a mesma área na memória anteriormente ocupada por  $\underline{S}$ . Assim, para esta rotina, os únicos argumentos necessários são a matriz  $\underline{S}$  e, no caso de usar a característica de banda variável, as características desta banda ( $MM$ ,  $N$ ,  $MA$ ,  $LF$ ) e o vetor  $\underline{IND}$ , indicador da última posição de cada coluna dentro de  $\underline{S}$ . A etapa de substituição para a frente para o cálculo dos deslocamentos (equações 1.40 e 1.41) é feita à medida em que são obtidas as linhas já triangularizadas (dentro do mesmo "DO", ver lista - gem) [27]. O tempo gasto para as transformações é fornecido (impresso) de 10 em 10 colunas ( $k=1,11,21,\dots$ ). Isto foi feito apenas para se ter uma medida de tempo desta etapa do programa que é a mais lenta de todo o processo de cálculo de uma estrutura.

Quando a matriz  $\underline{S}$  tiver sido montada pela técnica de esparsidade, em MONESP, ela terá de ser triangularizada em TRIESP, operando-se, também aí, apenas com os coeficientes não nulos. Utilizou-se, neste caso, o método de transformações ortogonais de Gram-Schmidt para obter o fator de Cholesky  $\underline{U}$ . Encontrou-se maior facilidade em se programar e em se operar com  $\underline{S}$  montada por colunas ( $\underline{S}$  por colunas), de forma esparsa, por Gram-Schmidt do que por Householder. É que, usando-se o primeiro, os algoritmos processam  $\underline{S}$  por colunas, forma em que  $\underline{S}$  está armazenada. Assim, o acesso é mais rápido aos dados. Entretanto, neste caso, necessita-se uma nova área para armazenar a matriz ortogonal  $\underline{Q}$  e o fator de Cholesky  $\underline{U}$ . A primeira ocupa a área anteriormente ocupada por  $\underline{S}$  na montagem e para  $\underline{U}$  cria-se uma nova área. Isto é, no entanto, compensado pela própria técnica de esparsidade no armazenamento que é bastante econômica em termos de ocupação de memória. Na utilização do programa, aconselha-se utilizar esta técnica para as treliças apenas quando elas não tiverem as características de banda bem definidas (item 4.1.a).

Um maior aperfeiçoamento dos algoritmos da técnica de esparsidade e da programação destes é ponto fundamental para aplicação do método do fator natural a problemas com um grande número de incógnitas.

Assim como em TRIANG, a etapa de substituição para a frente para o cálculo dos deslocamentos é também feita à medida que se obtém uma coluna da matriz  $\underline{U}$ . O vetor  $\underline{F}$  conterá, no final da retrossubstituição, os deslocamentos nodais da

estrutura.

O índice de coeficientes não nulos na matriz  $\underline{SC}$  cresce à medida em que a matriz é transformada. Se a matriz tem uma banda definida, esta ficará praticamente cheia. Para termos uma medida deste índice ele é impresso de 5 em 5 colunas ( $k=1,6,11,\dots$ ). Assim também tratamos de medir a economia feita com o armazenamento de  $\underline{U}$  por altura efetiva de coluna.

#### 5.2.d - CÁLCULO E IMPRESSÃO DOS RESULTADOS (DESLOCAMENTOS, FORÇAS, DEFORMAÇÕES, TENSÕES E REAÇÕES)

A rotina RESOL reordena os deslocamentos calculados em TRIANG ou TRIESP ( $\underline{Q}$ ) na forma em que foram fornecidos ( $\underline{DJ}$ ) e os imprime. No caso das treliças, calculam-se em seguida as forças e tensões nas barras assim como as reações de apoio da estrutura. Já no caso dos pórticos planos, a rotina SOLRE é chamada para calcular os demais resultados. As matrizes  $\underline{SMR}$  são lidas do disco para cada elemento e as solicitações nas extremidades dos elementos devido aos deslocamentos da estrutura são dadas pela equação abaixo.

$$\underline{AMD}_{6 \times 1} = \underline{SMR}_{6 \times 6} \cdot \underline{DJ}_{6 \times 1}^I \quad (5.2)$$

onde o índice  $I$  indica que utilizam-se apenas os 6 deslocamentos nas extremidades do elemento  $I$ . A soma de  $\underline{AMD}$  com as solicitações iniciais devido às cargas nos elementos,  $\underline{AML}^I$  fornecem as solicitações resultantes. As reações de apoio são obtidas através do produto  $\underline{R} : \underline{AMD}$  para cada direção restringida. As

contribuições destes produtos devido aos elementos ligados às direções restringidas é somada aos valores iniciais das reações de apoio fornecendo a reação de apoio resultante.

Para os elementos finitos triangulares, o cálculo dos resultados é feito nas rotinas CDTCST e CDTLST. A matriz  $\underline{B}$  é lida do disco, no caso do CST, e avaliada a partir de BETA, DELTA, AREA (lidos do disco) e da rotina FILST, no caso do LST. Com ela são calculadas as deformações (eq. 1.2) e depois as tensões (eq. 2.21) nos elementos.

#### 5.2.e - O CÁLCULO DO NÚMERO DE CONDICIONAMENTO

A intenção ao se programar a rotina CONDIC para o cálculo do número de condicionamento foi apenas a de se estudar e aplicar um dos processos de avaliação do número de algarismos significativos corretos num problema estrutural mal condicionado. Através dela foram possíveis os resultados apresentados no item (5.3).

O número de condicionamento da matriz de rigidez da estrutura é obtido através do produto das normas Hölder-1 desta mesma matriz, depois de um "scaling", pela de sua inversa. Como a matriz de rigidez não é montada no programa, ela é obtida através do produto  $\underline{S}^T \cdot \underline{S}$ . A programação só foi feita para  $\underline{S}$  montada de forma completa, o que dificulta sua aplicação a problemas de grandes estruturas. Pode-se, entretanto, facilmente estendê-las às outras técnicas de armazenamento. Utilizam-se duas

rotinas auxiliares. PRODUT calcula o produto  $\underline{S}^T \cdot \underline{S}$ . Foi também usada para verificar a introdução de erros no processo de inversão através da obtenção da matriz identidade a partir da matriz de rigidez, e de sua inversa, garantindo a confiabilidade dos resultados. INVER é uma rotina de inversão de matrizes pela técnica da partição, tendo sido utilizada para inverter a matriz de rigidez.

O fluxograma (5.6) dá em linhas gerais o processo de cálculo do número de condicionamento em CONDIC.

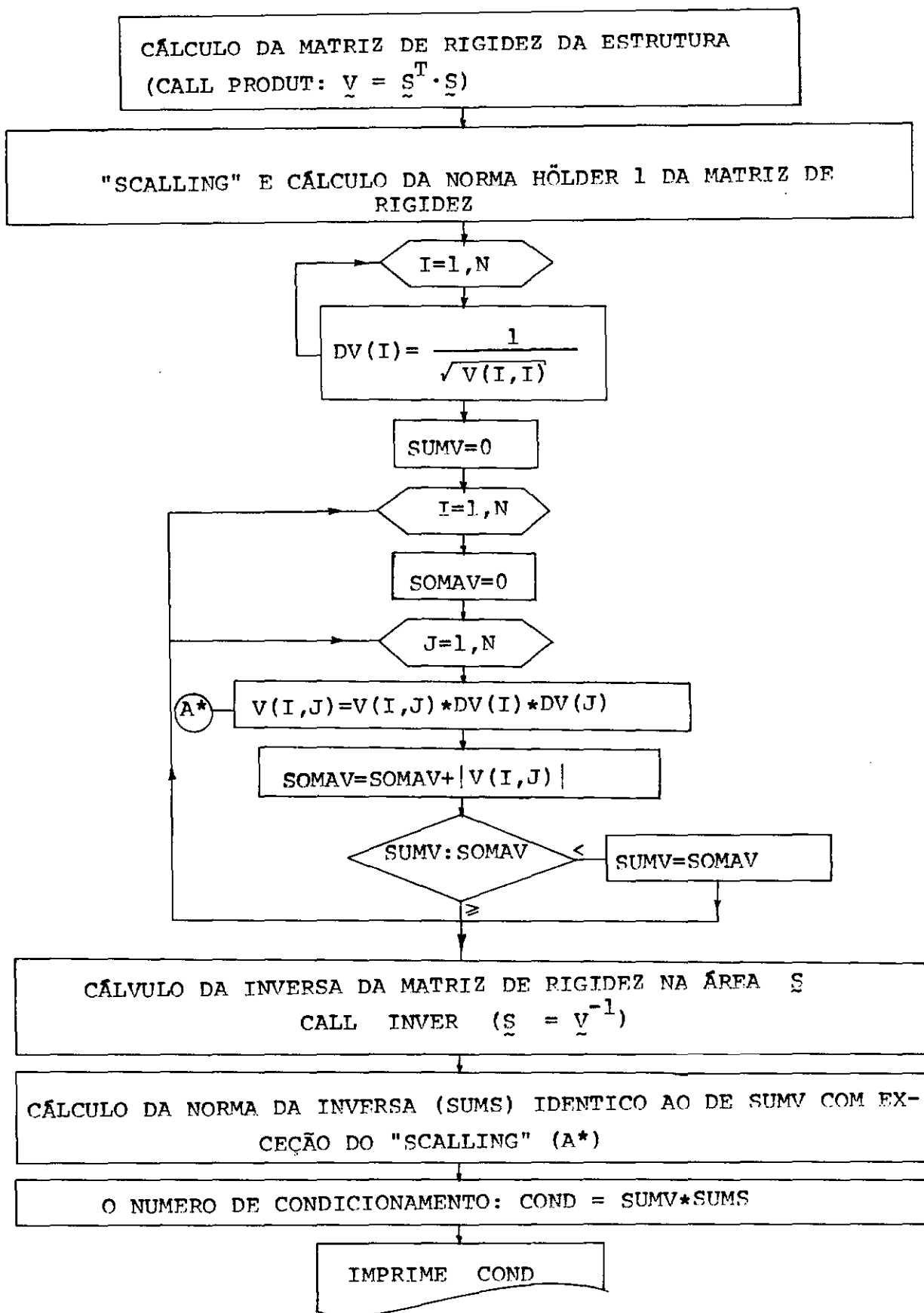


Fig. 5.6 - CÁLCULO DO NÚMERO DE CONDICIONAMENTO DA MATRIZ DE RIGIDEZ

### 5.3 - RESULTADOS E COMPARAÇÕES

Apesar do programa feito não ter alcançado um estado de otimização tal que permita comparar definitivamente o método do fator natural com o método clássico, conseguimos obter alguns resultados. Apresentamos exemplos simples desenvolvidos de forma completa para facilitar a compreensão das técnicas expostas nos capítulos anteriores. Comparações sobre a precisão, tempo de processamento e gasto de memória no computador vêm logo em seguida.

#### 5.3.a - EXEMPLOS EM GERAL

##### 5.3.a.1 - Treliça Plana:

Para a treliça plana da figura 5.7 temos os seguintes dados:  $NJ=3$  ;  $M=3$ ;  $NR=3$ ;  $NCN=2$ ;  $NDF=2$ ;  $AX=1$ ;  $E=1$ .

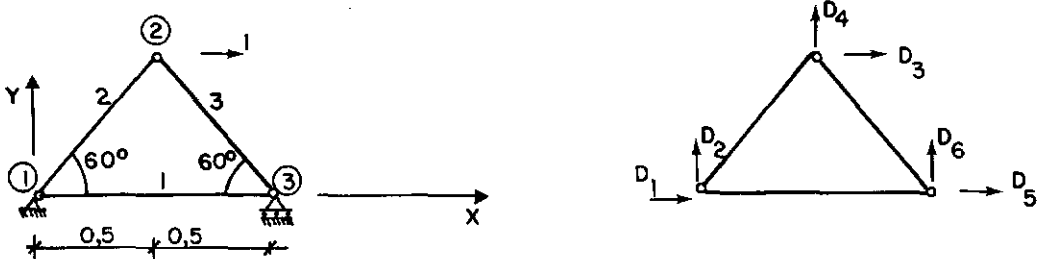


Fig. 5.7 - TRELIÇA PLANA

De acordo com a relação (2.7), obtemos primeiramente os fatores  $\underline{F}_i$  para cada elemento.

$$\text{Elemento 1 : } \theta = 0^{\circ} \quad \begin{cases} \cos \theta = 1 \\ \sin \theta = 0 \end{cases}$$



$$\sqrt{\frac{E \cdot AX}{L}} = 1$$

$$\underline{F}_1 = [1 \quad 0 \quad -1 \quad 0]$$

Elemento 2 :  $\theta = 60^\circ$   $\begin{cases} \cos\theta = 0.50 \\ \sin\theta = 0.867 \end{cases}$

$$\underline{F}_2 = [0.50 \quad 0.867 \quad -0.50 \quad -0.867]$$

Elemento 3 :  $\theta = 120^\circ$   $\begin{cases} \cos\theta = -0.50 \\ \sin\theta = 0.867 \end{cases}$

$$\underline{F}_3 = [-0.50 \quad 0.867 \quad 0.50 \quad -0.867]$$

O fator  $\underline{F}_S$  fica então:

$$\underline{F}_S_{3 \times 12} = \left[ \begin{array}{cccc|cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & \underline{0} & & & \underline{0} & & & & \\ \hline & \underline{0} & & & 0.5 & 0.867 & -0.5 & -0.867 & & \underline{0} & & \\ \hline & \underline{0} & & & & \underline{0} & & & -0.5 & 0.867 & 0.5 & -0.867 \end{array} \right]$$

(5.3)

Sendo  $\underline{q}$  o vetor de deslocamentos dos nós de cada elemento e  $\underline{D}$  o vetor de deslocamentos dos pontos nodais da estrutura, temos, de acordo com a numeração mostrada na figura (5.7), as seguintes relações:

$$\underline{q} = \underline{a} \cdot \underline{D}$$

$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{c} q_1 \\ q_2 \\ q_5 \\ q_6 \\ \hline q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ \hline q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{array} \right]_{12 \times 1} = \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]_{12 \times 6} \cdot \left[ \begin{array}{c} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{array} \right]_{6 \times 1}
 \end{array} \quad (5.4)$$

onde  $\underline{a}$  é a matriz topológica da estrutura.

Podemos agora obter a matriz  $\underline{S}$  através da equação (1.33). Considerando a relação (1.34), montamos em  $\underline{S}$ , com a qual trabalhamos, apenas os coeficientes correspondentes às direções livres ( $D_3$ ,  $D_4$  e  $D_5$ ).

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1,00 \\ -0.50 & -0.867 & 0 \\ -0.50 & 0.867 & 0.50 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

No programa obtêm-se diretamente este fator  $\underline{S}$ . As matrizes  $\underline{FS}$  e  $\underline{a}$  não são computadas. Os coeficientes de  $\underline{F}_1$  são montados apenas para as direções livres (Ver listagem).

Em seguida aplica-se o processo de decomposição ortogonal de Gram-Schmidt de acordo com o algoritmo empregado no ítem (3.3). Temos então:

$$\text{Para } j=1 \quad \rightarrow \quad \underline{s}_1^1 = \underline{s}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,5 \\ -0,5 \end{bmatrix}$$

$$i = 1$$

$$\text{Como } i=j \quad \rightarrow \quad u_{11} = \sqrt{(\underline{s}_1^{(1)})^T \cdot \underline{s}_1^{(1)}} = \sqrt{2 \times (0,5)^2} = 0,707$$

$$\underline{q}_1 = \frac{\underline{s}_1^{(1)}}{u_{11}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,707 \\ -0,707 \end{bmatrix}$$

$$j=2, \quad i=1$$

$$u_{12} = \underline{q}_1^T \cdot \underline{s}_2^{(1)} \quad \rightarrow \quad u_{12} = [0 \quad -0,707 \quad -0,707] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -0,867 \\ 0,867 \end{bmatrix} = 0$$

$$\underline{s}_2^{(2)} = \underline{s}_2^{(1)} - u_{12} \cdot \underline{q}_1 = \underline{s}_2^{(1)}$$

$$i = 2$$

$$i = j \quad \rightarrow \quad u_{22} = 1,225$$

$$\underline{q}_2 = \frac{\underline{s}_2^{(2)}}{u_{22}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,707 \\ 0,707 \end{bmatrix}$$

$$j=3, \quad i=1$$

$$u_{13} = \underline{q}_1^T \cdot \underline{s}_3^{(1)} = -0,3535$$

$$\underline{s}_3^{(2)} = \underline{s}_3^{(1)} - u_{13} \cdot \underline{q}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -0,25 \\ 0,25 \end{bmatrix}$$

$$i = 2$$

$$u_{23} = \underline{q}_2^T \cdot \underline{s}_3^{(2)} = 0,3535$$

$$\underline{s}_3^{(3)} = \underline{s}_3^{(2)} - u_{23} \cdot \underline{q}_2 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$i = 3$$

$$i = j \rightarrow u_{33} = 1$$

Portanto, através da utilização da matriz ortogonal  $\underline{Q}$ , obtivemos o fator de Cholesky  $\underline{U}$  :

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -0,707 & -0,707 & 0 \\ -0,707 & 0,707 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{U} = \begin{bmatrix} 0,707 & 0 & -0,3535 \\ 0 & 1,225 & 0,3535 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Podemos encontrar os deslocamentos nodais através de substituições sucessivas (equações 1.41 e 1.43):

$$\begin{bmatrix} 0,707 & 0 & 0 \\ 0 & 1,225 & 0 \\ -0,3535 & 0,3535 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= 1,414 \\ \rightarrow y_2 &= 0 \\ y_3 &= 0,50 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0,707 & 0 & -0,3535 \\ 0 & 1,225 & 0,3535 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_3 \\ D_4 \\ D_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,414 \\ 0 \\ 0,50 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} D_5 &= 0,50 \\ \rightarrow D_4 &= -0,144 \\ D_3 &= 2,25 \end{aligned}$$

Com estes deslocamentos podemos calcular as forças ou tensões nas barras da treliça.

### 5.3.a.2 - Pórtico Plano

Neste exemplo a matriz  $\underline{S}$  montada não tem mais o mesmo número de linhas e de elementos. O número de linhas desta matriz é :

$$MM = M \times (\ell_i - \ell_{0i})$$

Assim, para o pórtico plano da figura abaixo ([4] pg.127), temos:  $NJ=3$ ;  $M=2$ ;  $NR=6$ ;  $NCN=2$ ;  $NDF=3$ ;  $\ell_{0i}=3$ ;

$$\ell_i = NCN \times NDF = 6$$

$$MM = 2 \times (6-3) = 6$$

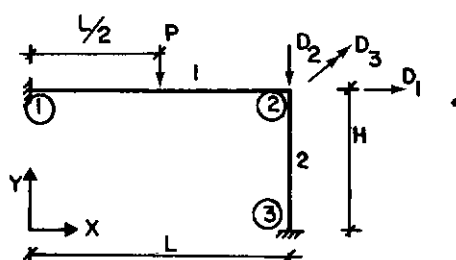


Fig. 5.8 - PÓRTICO PLANO

Utilizando a equação (2.16) montamos diretamente os fatores  $\underline{F}_1$  e  $\underline{F}_2$  a partir dos quais a obtenção da matriz  $\underline{S}$  é imediata. Temos também abaixo o vetor de cargas nodais  $\underline{F}$ .

$$\underline{S}_{6 \times 3} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{A}{L}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{L} \sqrt{\frac{I}{L}} & -\sqrt{\frac{I}{L}} \\ 0 & \frac{1}{L} \sqrt{\frac{3I}{L}} & -\sqrt{\frac{3I}{L}} \\ \hline 0 & \sqrt{\frac{A}{H}} & 0 \\ -\frac{3}{H} \sqrt{\frac{I}{H}} & 0 & -2\sqrt{\frac{I}{H}} \\ -\frac{1}{H} \sqrt{\frac{3I}{H}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{Elemento 1} \\ \\ \\ \leftarrow \text{Elemento 2} \end{matrix} \cdot \sqrt{E} \quad \underline{F}_{3 \times 1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{P}{2} \\ -\frac{PL}{8} \end{Bmatrix}$$

Sendo:  $P = 10k$ ;  $L=H=144$  plg;  $E = 30000ksi$  ;

$I = 200 \text{ plg}^4$  ;  $A = 10 \text{ plg}^2$  , vem :

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} 45,6 & 0 & 0 \\ 0 & 4,25 & -204 \\ 0 & 2,45 & -354 \\ 0 & 45,6 & 0 \\ -4,25 & 0 & -408 \\ -2,45 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{F} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 5 \\ -180 \end{Bmatrix}$$

Triangularizamos  $\underline{S}$  pelo método de Householder, seguindo o fluxograma apresentado no item 3.2:

$$k=1 \rightarrow XNK = \sqrt{45,6^2 + (-4,25)^2 + (-2,45)^2} = 45,9$$

O sinal é escolhido em função da variável VARIA ser positiva ou não:  $VARIA = |45,6 - 45,9| - |45,6| - 45,9 < 0$

$$\rightarrow w_1 = s_{kk} + XNK = 91,5$$

$$TETA = \frac{2}{(XNK^2 + w_1^2 - s_{kk}^2)} = 0,000238$$

$$\underline{W} = \{45,9 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -4,25 \quad -2,45\}$$

$$\underline{V}^T = \underline{W}^T \cdot \underline{S} = [4202 \quad 0 \quad 1736]$$

$$\underline{S}^{(1)} = \underline{S} - TETA \cdot (\underline{W} \cdot \underline{V}^T) = \begin{bmatrix} -45,9 & 0 & -37,8 \\ 0 & 4,25 & -204 \\ 0 & 2,45 & -354 \\ 0 & 45,6 & 0 \\ 0 & 0 & -406 \\ 0 & 0 & 1,01 \end{bmatrix}$$

Seguindo este mesmo processo para  $k=2$  e  $k=3$  obtemos finalmente  $\underline{R}^*$  :

$$\underline{R}^* = \underline{S}^{(3)} = \underline{S}^{(2)} - TETA \cdot (\underline{W} \cdot \underline{V}^T) = \begin{bmatrix} -45,9 & 0 & -37,8 \\ 0 & -45,9 & 37,8 \\ 0 & 0 & -575 \\ \hline & 0 & \end{bmatrix} \leftarrow \underline{U}$$

Podemos encontrar os deslocamentos nodais através de substituições sucessivas:

$$D_1 = 438 \times 10^{-6} \text{ plg}$$

$$D_2 = 1934 \times 10^{-6} \text{ plg}$$

$$D_3 = -532 \times 10^{-6} \text{ rd}$$

### 5.3.a.3 - Exemplo de Aplicação dos Elementos Finitos Triangulares

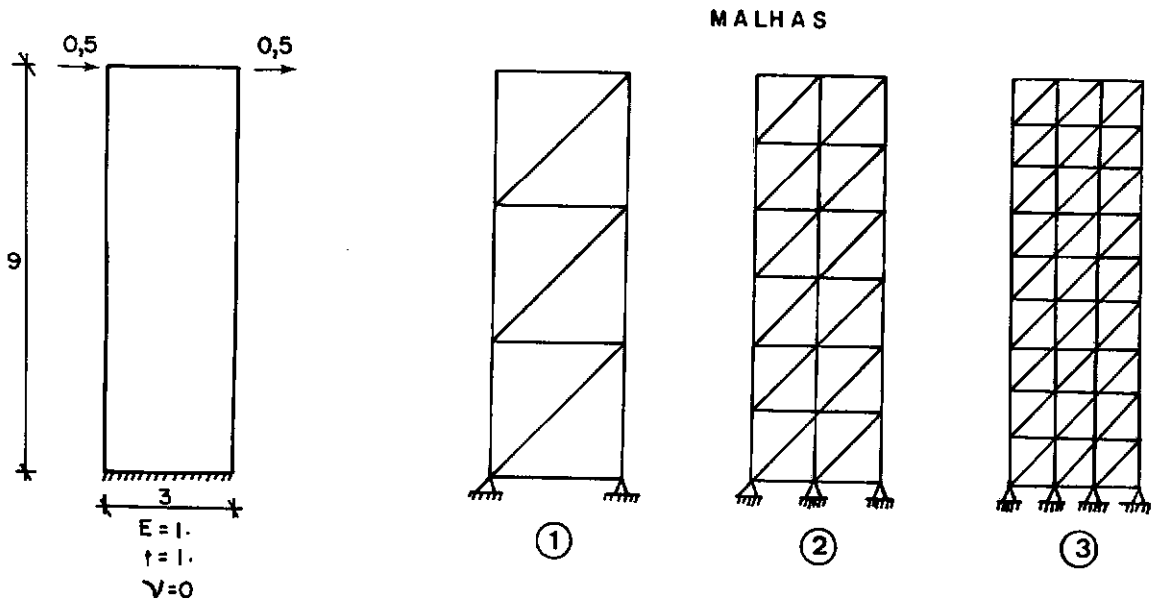


Fig. 5.9 - EXEMPLO DE UTILIZAÇÃO DOS ELEMENTOS CST E LST

MALHA	1		2		3
ELEMENTO	CST	LST	CST	LST	CST
NÓS	8	21	21	65	40
ELEMENTOS	6	6	24	24	54

QUADRO 5.4

O exemplo da figura acima foi tirado da referência [8], pag. 185, onde é feita uma comparação da eficiência entre os tipos de elementos em que a estrutura pode ser discretizada. Aqui interessou-nos apenas comprovar a teoria e a eficiência do programa. No gráfico abaixo apresentam-se os resultados obti-



dos e comprovados pela utilização do sistema LORANE, para o deslocamento horizontal da extremidade superior da peça. No quadro (5. 15 ) comparam-se os tempos para a resolução do problema.

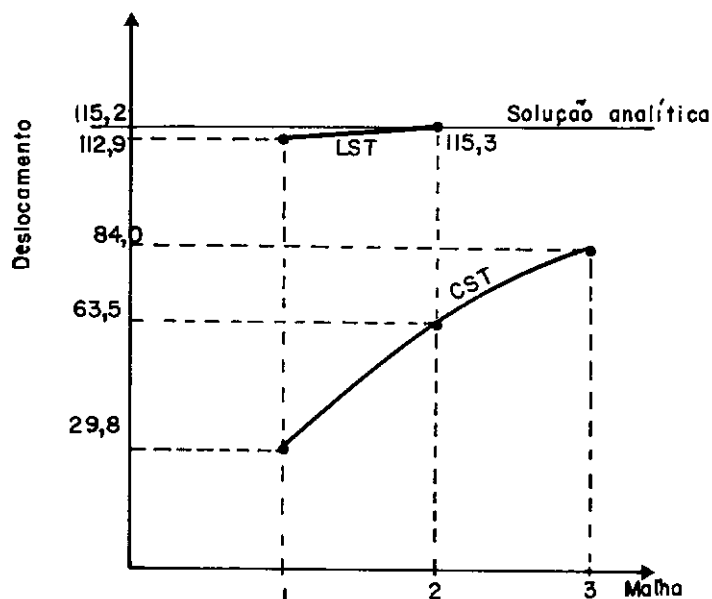


Fig. 5.10 - ORDENADAS: DESLOCAMENTO HORIZONTAL NA EXTREMIDADE SUPERIOR (FIG.5.9); ABCISSAS: MALHA DE ELEMENTOS FINITOS

Aproveitamos este exemplo para mostrar também os índices de aproveitamento da memória no programa (Ver item 5. 3.c).

### 5.3.b - COMPARAÇÕES SOBRE A PRECISÃO

Compara-se a diferença de precisão dos resultados obtidos pelo processo novo e pelo método clássico. Como o fator  $\underline{S}$  é mais bem condicionado que a matriz de rigidez (item 1.6. d) e a decomposição ortogonal é mais estável do que Gauss ou Cho-

lesky (ítem 3.4), era de se esperar que obtivéssemos bons resultados. Os resultados poderiam ter sido ainda melhores se tivéssemos utilizado o processo iterativo exposto no ítem 1.6.d.

Adotou-se como exemplo de mal condicionamento a treliça plana da figura (5.11) [3]. Fez-se variar a área da barra 8, uma vez que obtém-se assim uma estrutura cada vez mais flexível próxima ao apoio. Como foi demonstrado no ítem 1.6.c, isto provoca um mal condicionamento real da estrutura.

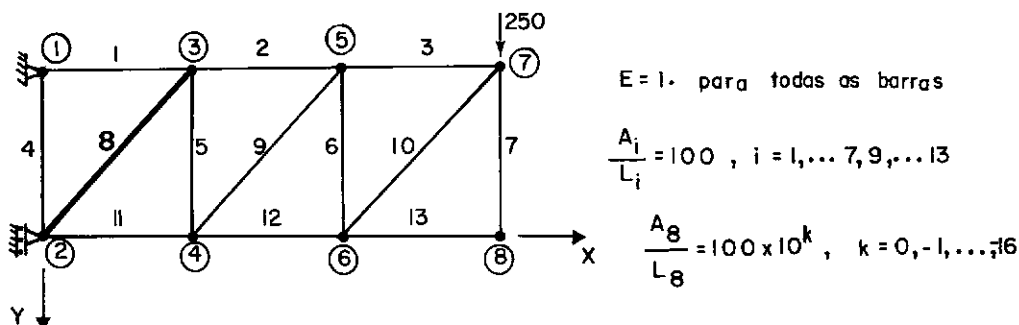


Fig. 5.11 - EXEMPLO DE MAL CONDICIONAMENTO

O deslocamento vertical do nó 8 foi calculado de 4 formas diferentes:

- I) Pelo método do fator natural (usando a decomposição de Householder) com dupla precisão.
- II) Idem a "I", com precisão simples.
- III) Pelo método do fator natural (usando a decomposição de Gram-Schmidt) com precisão simples.

IV) Pelo método clássico (triangularização pelo método de Gauss) em precisão simples.

O quadro (5.5) apresenta o deslocamento vertical do nó 8 assim encontrado para diferentes relações entre a rigidez da barra 8 e das demais. Em "I" e "II" calculou-se o resíduo como:

$$\Delta \underline{F} = \underline{F} - \underline{U}^T \cdot \underline{U} \cdot \underline{D} \quad (5.7)$$

onde a operação  $(\underline{U}^T \cdot \underline{U} \cdot \underline{D})$  restitui o vetor de cargas. O erro relativo no vetor de cargas restituído é dado por  $\frac{||\Delta \underline{F}||_E}{||\underline{F}||_E}$ , sendo apresentado na mesma tabela, indicando que os deslocamentos obtidos em "I" podem ser tomados como exatos com um erro relativo  $\epsilon_D$ , menor que o erro no vetor de cargas restituído ( $\epsilon_F$ ).

$$\epsilon_D \leq \epsilon_F = \frac{||\Delta \underline{F}||_E}{||\underline{F}||_E} \quad (5.8)$$

O número de condicionamento da matriz de rigidez foi calculado usando as equações (1.35) e (1.52), com a norma Hölder-2 e utilizando a dupla precisão do computador.

$$C(\underline{K}) = ||\underline{S}^T \cdot \underline{S}||_2 \cdot ||(\underline{S}^T \cdot \underline{S})^{-1}||_2 \quad (5.9)$$

O número de condicionamento do fator  $\underline{S}$  foi obtido como a raiz quadrada de  $C(\underline{K})$  (eq. 1.58).

No quadro (5.5), comparando-se os deslocamentos obtidos em "I" e em "IV", observa-se que os resultados obtidos pelo método clássico começam a perder precisão quando  $\frac{k_8}{k_1} = 10^{-4}$  e

$C(\underline{K}) = 0,39 \times 10^5$ . Para  $\frac{k_8}{k_1} = 10^{-10}$  e  $C(\underline{K}) = 0,39 \times 10^{11}$  os resultados obtidos pelo método clássico já não oferecem nenhum algarismo significativo correto. Observando-se agora os resultados obtidos em "II" verifica-se que só começamos a ter diferenças no cálculo dos deslocamentos a partir de  $\frac{k_8}{k_1} = 10^{-7}$  e  $C(\underline{K}) = 0,39 \times 10^8$ . Mesmo para  $C(\underline{K}) = 0,39 \times 10^{17}$  ainda conseguimos obter 2 algarismos corretos em precisão simples pelo método do fator natural. Os altos valores de  $\varepsilon_f$  ("II") apenas nos mostram que o processo de restituição do vetor de cargas (eq. 5.7) introduz um erro que se soma ao erro que já havia no vetor de deslocamentos. A comparação dos deslocamentos calculados pelo processo "II" e comparados com "I" nos garantem a validade da equação (5.8). Observou-se ainda que, no processo de obtenção do número de condicionamento, a norma da inversa cresce enquanto a norma da matriz de rigidez se mantém praticamente constante.

O quadro (5.6) apresenta os números de condicionamento, para o mesmo exemplo, calculados através da utilização do "scaling" da matriz de rigidez, como indicado na equação (1.56), tomando-se a norma Hölder-1 (eq. 1.50) e calculando-se o fator de Cholesky pelo método de Householder.

$\frac{k_8}{k_1}$	I		II		III	IV	C(K)	C(S)
	DESL. VERTIC. N° 8	$\epsilon_F$	DESLC. VERT. 8	$\epsilon_F$	DESL. VERT. 8	DESL. VERT. 8		
$10^0$	70,0448251315	$5,2 \times 10^{-20}$	70,044825128	$7,0 \times 10^{-9}$	70,044825	70,04483	25,9	5,099
$10^{-2}$	566,524054470	$3,7 \times 10^{-19}$	566,524054456	$1,8 \times 10^{-7}$	566,52405	566,52405	410	20,2
$10^{-4}$	50214,4469886	$7,0 \times 10^{-17}$	50214,44702	$2,2 \times 10^{-5}$	50214,447	50214,463	$0,39 \times 10^5$	197
$10^{-6}$	$5,015006740 \times 10^6$	$5,2 \times 10^{-15}$	$5,01500681 \times 10^6$	$2,6 \times 10^{-3}$	$5,0150067 \times 10^6$	$5,01505 \times 10^6$	$0,39 \times 10^7$	1975
$10^{-7}$	$5,0149482 \times 10^7$	$3,9 \times 10^{-14}$	$5,0149483 \times 10^7$	$1,8 \times 10^{-2}$	$5,0149482 \times 10^7$	$5,01467 \times 10^7$	$0,39 \times 10^8$	6245
$10^{-8}$	$5,0149424 \times 10^8$	$2,8 \times 10^{-13}$	$5,0149436 \times 10^8$	$6,9 \times 10^{-2}$	$5,0149424 \times 10^8$	$5,036 \times 10^8$	$0,39 \times 10^9$	$1,97 \times 10^4$
$10^{-9}$	$5,0149418 \times 10^9$	$2,9 \times 10^{-12}$	$5,0149411 \times 10^9$	1,3	$5,0149418 \times 10^9$	$4,97 \times 10^9$	$0,39 \times 10^{10}$	$6,24 \times 10^4$
$10^{-10}$	$5,0149417 \times 10^{10}$	$3,5 \times 10^{-11}$	$5,0149367 \times 10^{10}$	7,6	$5,0149417 \times 10^{10}$	$8,95 \times 10^{10}$	$0,39 \times 10^{11}$	$1,97 \times 10^5$
$10^{-12}$	$5,0149417 \times 10^{12}$	$1,0 \times 10^{-8}$	$5,0149953 \times 10^{12}$	-	$5,0149417 \times 10^{12}$	$-8,95 \times 10^{10}$	$0,39 \times 10^{13}$	$1,97 \times 10^6$
$10^{-14}$	$5,0149417 \times 10^{14}$	$4,6 \times 10^{-7}$	$5,01464 \times 10^{14}$	-	-	$-8,95 \times 10^{10}$	$0,39 \times 10^{15}$	$1,97 \times 10^7$
$10^{-16}$	$5,0149417 \times 10^{16}$	$3,9 \times 10^{-5}$	$5,020 \times 10^{16}$	-	-	-	$0,39 \times 10^{17}$	$1,97 \times 10^8$

Quadro 5.5 - RESULTADOS PARA O DESLOCAMENTO VERTICAL DO N° 8 E RESÍDUOS RELATIVOS NO VETOR DE CARGAS RESTITUÍDO

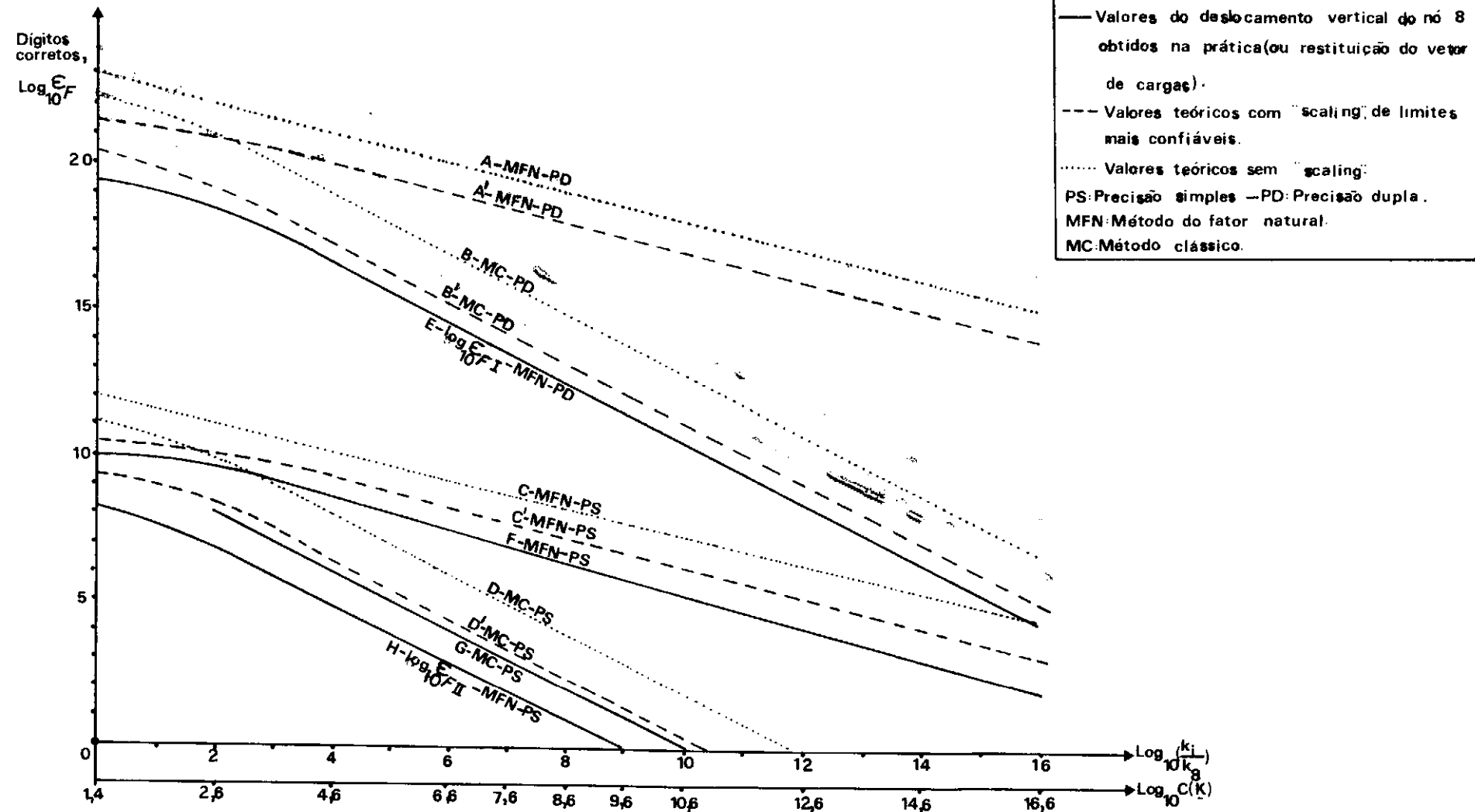


FIG.-5.12- GRÁFICO COMPARATIVO DA PRECISÃO PARA O PROCESSO CLÁSSICO E O NOVO MÉTODO- RESULTADOS PRÁTICOS E VALORES TEÓRICOS ESPERADOS.

$\frac{k_8}{k_1}$	$C(\underline{k})$	$C(\underline{s})$	Dígitos per- didos no mē- todo clási- co $\log[C(\underline{k})]$	Dígitos per- didos no nō- vo método $\log[C(\underline{s})]$
$10^0$	518	23	2,7	1,4
$10^{-2}$	5217	72	3,7	1,9
$10^{-4}$	$4,76 \times 10^5$	689	5,7	2,8
$10^{-6}$	$4,75 \times 10^7$	6892	7,7	3,8
$10^{-7}$	$4,75 \times 10^8$	$2,2 \times 10^4$	8,7	4,3
$10^{-8}$	$4,75 \times 10^9$	$6,9 \times 10^4$	9,7	4,8
$10^{-9}$	$4,75 \times 10^{10}$	$2,2 \times 10^5$	10,7	5,3
$10^{-10}$	$4,75 \times 10^{11}$	$6,9 \times 10^5$	11,7	5,8
$10^{-12}$	$4,75 \times 10^{13}$	$6,9 \times 10^6$	13,7	6,8
$10^{-14}$	$4,75 \times 10^{15}$	$6,9 \times 10^7$	15,7	7,8
$10^{-16}$	$4,75 \times 10^{17}$	$6,9 \times 10^8$	17,7	8,8

Quadro 5.6 - CÁLCULO DO NÚMERO DE CONDICIONAMENTO FAZENDO-SE O "SCALING" PRÉVIO PARA EVITAR O MAL CONDICIONAMENTO ARTIFICIAL

O número de dígitos corretos pode ser calculado a partir das tabelas anteriores utilizando a equação (1.53). Com isto, podemos traçar agora o gráfico da figura (5.12) comparando os resultados obtidos para o deslocamento vertical do nó 8.

Tanto as curvas A, A', C e C' como B, B', D e D' são paralelas, pois foram obtidas teoricamente a partir de

um mesmo número de condicionamento, utilizando a equação (1.53) , na qual, para o Burroughs-6700:

$p = 12$  dígitos em precisão simples

$p = 23$  dígitos em dupla precisão

As curvas  $A'$  e  $C'$  são menos inclinadas do que  $B'$  e  $D'$  porque no método do fator natural o número de condicionamento cresce mais lentamente. A curva  $F$  foi obtida baseada na segurança dada pela curva  $E$  para a exatidão dos deslocamentos obtidos em precisão dupla. A proximidade das curvas  $C'$  e  $F$  ,  $D'$  e  $G$  demonstra a validade da fórmula (1.53) empregada para a avaliação do número de dígitos corretos nos deslocamentos, em problemas onde ocorre o truncamento inicial devido ao mal condicionamento. O "scaling" prévio da matriz fornece um limite mais confiável para os erros, como demonstra a comparação das curvas  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  com  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$ . O número de condicionamento calculado através das normas fornece resultados um pouco abaixo do valor verdadeiro, calculado através dos autovalores, como é visto mais adiante (Fig. 5.13). Além disso, a não consideração do erro de arredondamento pela fórmula e o fato de só termos tomado o deslocamento de um dos nós como referência são alguns dos motivos do afastamento das curvas teóricas daquelas obtidas na prática.

Como se observa no gráfico, os resultados obtidos pelo método do fator natural em precisão simples são bem superiores àqueles fornecidos pelo método clássico. Entretanto, mesmo que apliquemos iterações no novo método em precisão simples , não conseguiremos superar os resultados obtidos pelo método clássico em precisão dupla. A diferença será sempre no mínimo a dis-



tância entre as duas curvas obtidas teoricamente, B' e C'. Os afastamentos entre as curvas A' e B' ou C' e D' garantem a superioridade em precisão do método do fator natural quando se usa o mesmo número de dígitos no computador que no método clássico.

Depois de feitas estas comparações procuramos conhecer qual o benefício da estabilidade dos processos ortogonais sobre a precisão dos resultados. Comparam-se, em seguida, os resultados da triangularização das matrizes mal condicionadas de Hilbert utilizando-se o método de Cholesky e o método de Householder. Resolveu-se para isto o sistema de equações da forma:

$$\underline{H} \cdot \underline{x} = \underline{f} \quad (5.10)$$

onde

$\underline{H}_{N \times N}$  - matriz de Hilbert de ordem N

$\underline{f}_N$  - vetor de N posições, onde  $f_i = 1$

$\underline{x}$  - vetor de incógnitas de N posições

Calculou-se em seguida um vetor de resíduos  $\underline{RES}$  a partir do vetor  $\underline{x}$  obtido em (5.11) e o comprimento euclidiano deste vetor (eq. 1.47).

$$\underline{RES} = \underline{f} - \underline{H} \cdot \underline{x} \quad (5.11)$$

$$||\underline{RES}||_E = \left( \sum_{i=1}^N res_i^2 \right)^{1/2} \quad (5.12)$$

O processo foi repetido com N variando de 1 a 15 para o método de Cholesky e de Householder em precisão simples e em dupla precisão, obtendo-se os resultados do quadro (5.7). O gráfico da figura (5.13) apresenta 3 curvas:

N	$  \tilde{Res}  _E$				C(H)	
	Cholesky Prec.simp.	Cholesky Dupla Prec.	Householder Prec.Simp.	Householder Dupla prec.	Ref. [13]	Produto das normas $  \tilde{H}   \cdot   \tilde{H}^{-1}  _1$
2	$7,3 \times 10^{-12}$	0	$4,6 \times 10^{-11}$	$2,6 \times 10^{-23}$	$1,93 \times 10^1$	$1,39 \times 10^1$
3	$6,0 \times 10^{-11}$	$5,9 \times 10^{-23}$	$1,4 \times 10^{-10}$	$4,3 \times 10^{-22}$	$5,24 \times 10^2$	$3,72 \times 10^2$
4	$2,9 \times 10^{-10}$	$4,7 \times 10^{-22}$	$8,6 \times 10^{-10}$	$2,7 \times 10^{-21}$	$1,55 \times 10^4$	$1,05 \times 10^4$
5	$1,3 \times 10^{-9}$	$7,2 \times 10^{-21}$	$1,3 \times 10^{-9}$	$1,4 \times 10^{-20}$	$4,77 \times 10^5$	$2,93 \times 10^5$
6	$7,2 \times 10^{-9}$	$2,5 \times 10^{-20}$	$8,0 \times 10^{-9}$	$3,9 \times 10^{-20}$	$1,50 \times 10^7$	$8,28 \times 10^6$
7	$2,8 \times 10^{-8}$	$2,1 \times 10^{-19}$	$3,4 \times 10^{-8}$	$3,9 \times 10^{-19}$	$4,75 \times 10^8$	$2,74 \times 10^8$
8	$2,2 \times 10^{-7}$	$4,9 \times 10^{-19}$	$6,0 \times 10^{-7}$	$1,2 \times 10^{-18}$	$1,53 \times 10^{10}$	$8,63 \times 10^9$
9	$8,6 \times 10^{-7}$	$2,9 \times 10^{-18}$	$6,0 \times 10^{-6}$	$6,5 \times 10^{-18}$	$4,93 \times 10^{11}$	$2,62 \times 10^{11}$
10	Raiz	de	$5,5 \times 10^{-5}$	$2,8 \times 10^{-15}$	$1,60 \times 10^{13}$	$3,36 \times 10^{14}$
11	número	negativo	$5,2 \times 10^{-6}$	$2,2 \times 10^{-17}$	-	Resultados
12	-	-	$7,7 \times 10^{-6}$	$2,0 \times 10^{-17}$	-	Inconsist.
13	-	-	$4,9 \times 10^{-5}$	$2,9 \times 10^{-16}$	-	-
14	-	-	$4,3 \times 10^{-6}$	$1,5 \times 10^{-17}$	-	-
15	-	-	$1,3 \times 10^{-3}$	$1,0 \times 10^{-16}$	-	-

Quadro 5.7 - COMPARAÇÕES ENTRE O MÉTODO DE HOUSEHOLDER E O DE CHOLSKY  
EM RELAÇÃO À ESTABILIDADE E PRECISÃO

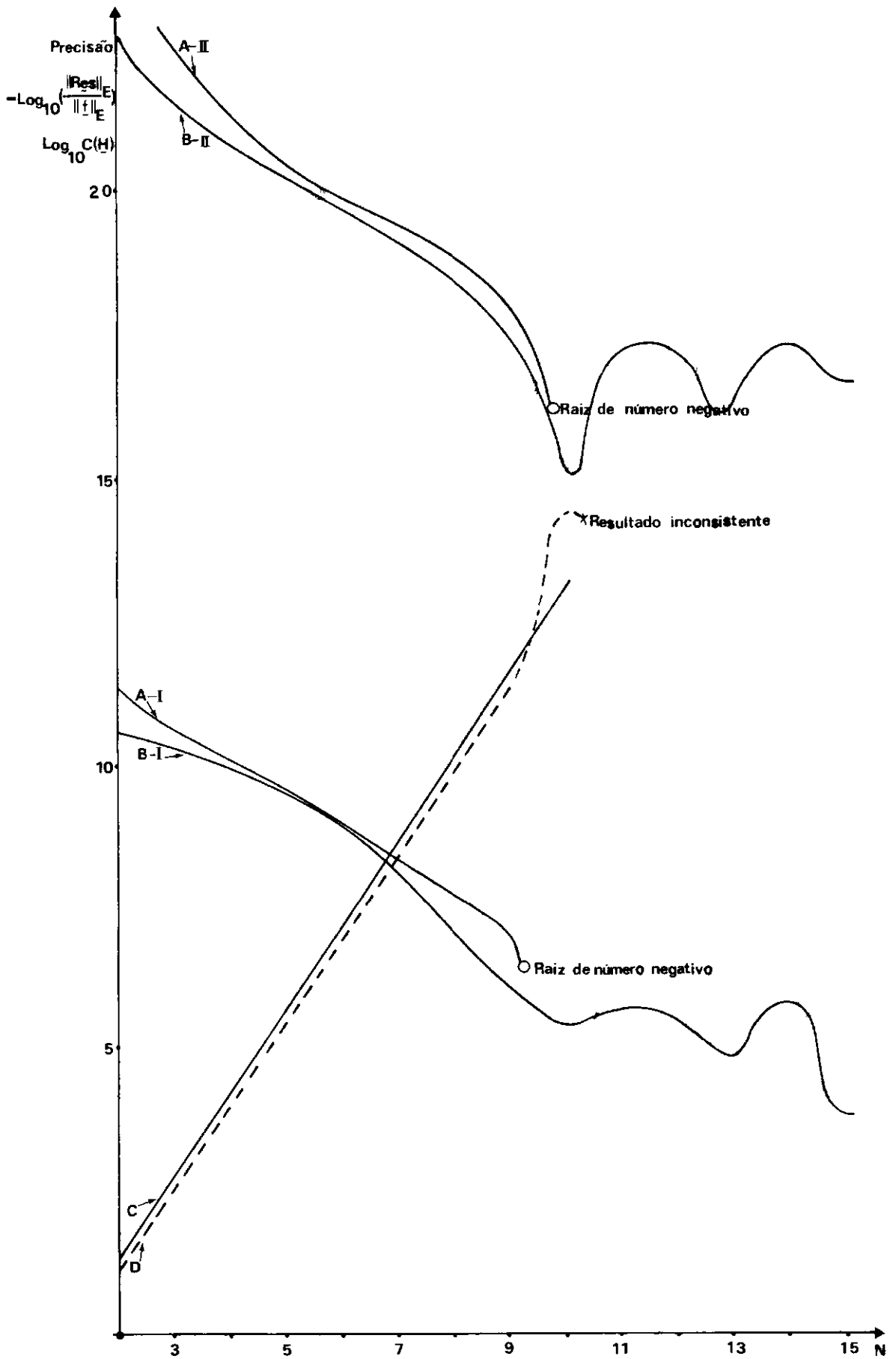


Fig. 5.13—Comparação entre o método de Householder e o de Cholesky em relação à estabilidade e precisão.

A) -  $\log_{10} \frac{||\tilde{RES}||_E}{||\tilde{f}||_E} \times N$  para o método de Cholesky (I=Precisão simples; II=Precisão dupla)

B) -  $\log_{10} \frac{||\tilde{RES}||_E}{||\tilde{f}||_E} \times N$  para o método de Householder (I=Precisão simples; II=Precisão dupla)

C)  $\log_{10} C(\underline{H}) \times N$  - onde  $C(\underline{H})$  é o número de condicionamento da matriz de Hilbert (referência [13], pag.81).

D)  $\log_{10} C(\underline{H}) \times N$  - onde  $C(\underline{H})$  foi calculado através do produto das normas Hölder-1 de  $\underline{H}$  e  $\underline{H}^{-1}$  com "scaling" em dupla precisão.

Destes resultados verificamos que o método de Householder apresenta resultados quase tão exatos como o de Cholesky com a vantagem de ser utilizável sem problemas mesmo para sistemas de equações cujo número de condicionamento seja bastante elevado (superior a  $1,6 \times 10^{13}$ ). Já pelo método de Cholesky não conseguimos mais resultados para a matriz de Hilbert de ordem 10. Na raiz quadrada para o cálculo do elemento da diagonal o radicando tornou-se negativo. Por isto, podemos compreender as afirmações de que o método de Householder (ou outro processo de decomposição ortogonal, como Gram-Schmidt ou Givens) é mais estável do que o de Cholesky (ou Gauss) [12], [14]. Além disso, não há necessidade da escolha do pivot (como no método de Gauss, por exemplo). Observa-se que o cálculo em precisão dupla do computador nada influi na estabilidade dos métodos. O método de Householder apresenta resultados mesmo quando a matriz é singular ([1], pag.35).

A curva D demonstra a validade do método em -

pregado para o cálculo do número de condicionamento através das normas. Os resultados ficam apenas um pouco abaixo do valor verdadeiro, calculado através dos autovalores. Não se consegue calcular números de condicionamento para as matrizes de Hilbert de ordem superior a 10, mesmo usando a dupla precisão. Atribui-se isto ao fato do mal condicionamento da própria matriz, em que os menores autovalores são mal representados no computador (item 1, 6,b).

Assim, concluímos que os resultados mais precisos alcançados pelo método do fator natural devem-se ao fato de que trabalha-se com uma matriz cujo número de condicionamento é bem inferior (eq. 1.58) ao da matriz de rigidez. Em matrizes de rigidez cujo número de condicionamento fosse superior a  $\approx 10^{13}$  teríamos, com o emprego dos métodos ortogonais, a garantia da estabilidade da resolução do sistema de equações, enquanto que o método de Cholesky se instabiliza.

Além do exemplo de treliça plana apresentado, de caráter teórico, procuramos ainda confrontar os resultados obtidos pelo programa desenvolvido com aqueles obtidos pelo método clássico em casos de aplicação mais próximos à realidade.

Calculamos uma estrutura de pórtico plano em que eliminamos o grau de liberdade à rotação e a deformação axial das vigas. Atribuiu-se-lhes uma inércia desprezível e uma área grande. Este é o caso, por exemplo, dos deslocamentos em um andar de um edifício, em que a laje tem grande área e pequena inércia (em relação às vigas e pilares), não se destinando normalmente a transmitir esforços de flexão.

Para a estrutura calculada tomamos o aço como material para os pilares,  $E = 2100 \text{ T/cm}^2$ ,  $I_Z = 750000 \text{ cm}^4$ ,  $A_X = 991 \text{ cm}^2$ . Para os elementos do diafragma adotamos  $A_X = 500000 \text{ cm}^2$  e  $I_Z = 0$ . A estrutura está esquematizada na figura abaixo.

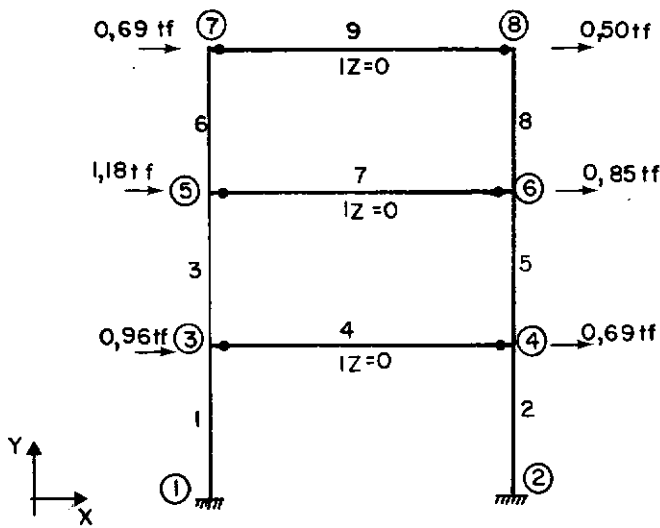


Fig. 5.14 - FUNCIONAMENTO DO DIAFRAGMA NUM EDIFÍCIO COM CARGA DE VENTO

O número de condicionamento calculado para a matriz de rigidez desta estrutura é de  $1,1 \times 10^7$ . Com isto, no método clássico, teríamos:

$$p = 12 - \log(1,1 \times 10^7) = 4,9 \approx 4$$

Ou seja, no máximo 4 dígitos corretos no resultado para os 12 dígitos da precisão simples. Já, para o método do fator natural, teríamos:

$$p_s = 12 - \log \sqrt{1,1 \times 10^7} = 8,5 \approx 8 \quad (\text{precisão simples})$$

$$p_D = 23 - \log \sqrt{1,1 \times 10^7} = 19,5 \approx 19 \quad (\text{precisão dupla})$$

O deslocamento horizontal do nó 8 supera um pouco esta previsão, no caso do método fator natural em precisão simples, como se vê no quadro (5.8).

MET.CLÁSSICO PREC.SIMPLES	7,10528
MET.FATOR NAT.PREC.SIMPLES	7,10582001576
MET.FATOR NAT.PREC.DUPLA	7,10582001534

Quadro 5.8 - DESLOCAMENTO HORIZONTAL DO NÓ 8 NA ESTRUTURA DA FIG. (5.14)

Calculamos também uma estrutura simulando uma ponte biapoiada, de inércia variável, discretizada em elementos de pórtico plano, de acordo com a figura (5.15), de duas formas diferentes.

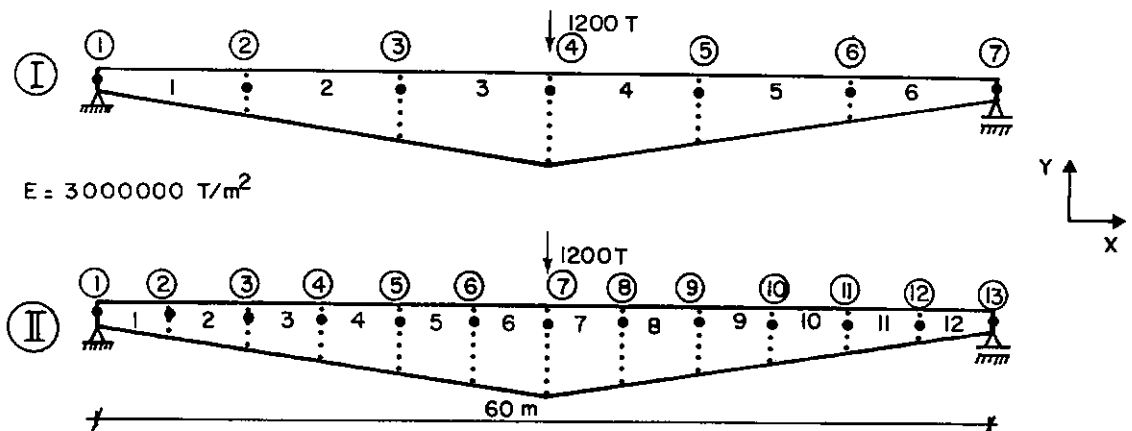


Fig. 5.15 - PONTE DE CONCRETO ARMADO BIAPOIADA DISCRETIZADA EM 6(I) E 12(II) ELEMENTOS

Neste problema, a relação entre as inércias no meio do vão e no apoio é de 41,2. O número de condicionamento da matriz de rigidez para a discretização I vale  $1,9 \times 10^3$  e para a discretização II vale  $3,3 \times 10^4$ . Portanto, o número de condicionamento aumentou com o crescimento do número de elementos em que é discretizada a estrutura. O quadro (5.9) fornece o deslocamento vertical do nó central da estrutura (para I e II) e o número de dígitos corretos avaliados a partir do número de condicionamento.

MÉTODO	PRECISÃO	DISCRET.	DESLOC. VERT. NÓ CENTRAL	NUM. DE DÍGITOS CORRETOS	
				OBTIDOS	AVALIADOS
CLÁSSICO	SIMPLES	I	-0,14492941192	9	8
		II	-0,10785515355	9	7
FATOR NATURAL	SIMPLES	I	-0,144929411743	10	10
		II	-0,107855153703	-	9
FATOR NATURAL	DUPLA	I	-0,144929411765	-	21
		II	-	-	20

Quadro 5.9

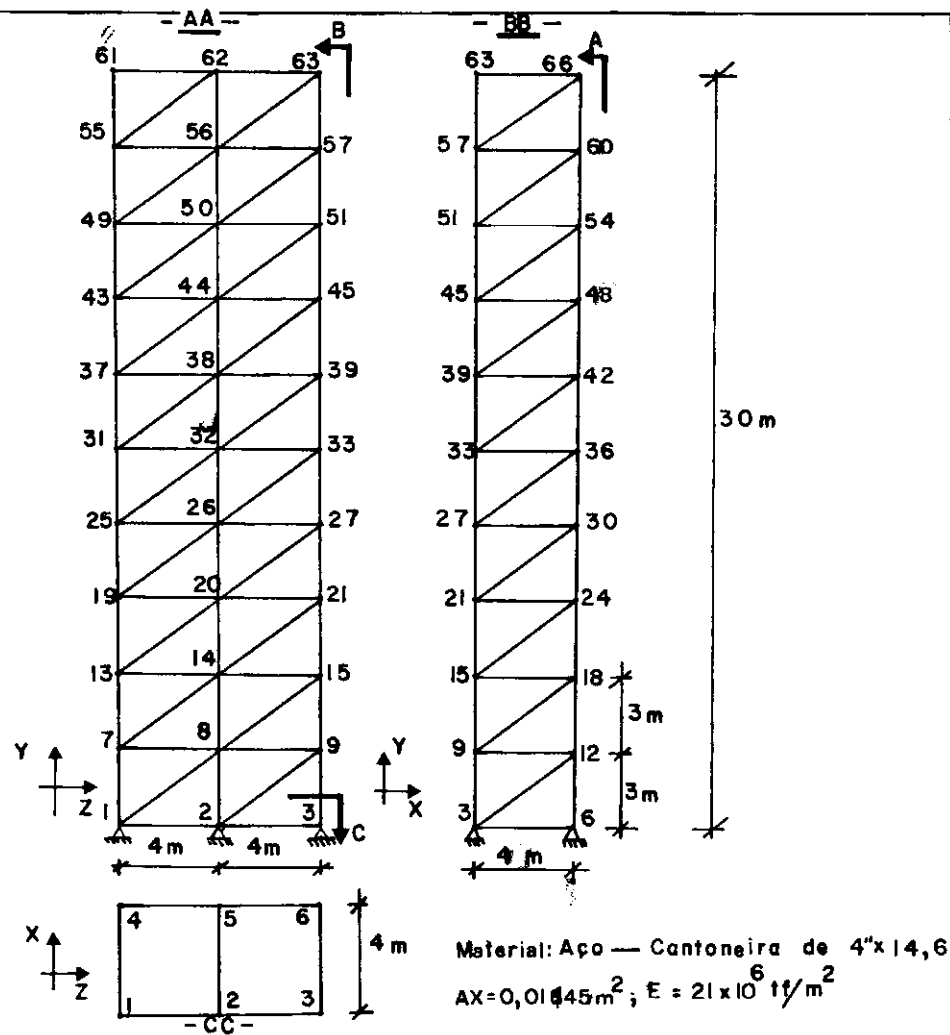
### 5.3.c - RESULTADOS DA APLICAÇÃO DAS TÉCNICAS DE ARMAZENAMENTO

Vejamos, inicialmente, como varia o índice de esparsidade durante a resolução de uma estrutura. O quadro (5.10) fornece o número total de coeficientes e as porcentagens de elementos não nulos armazenados para a estrutura da figura (5.9) ,

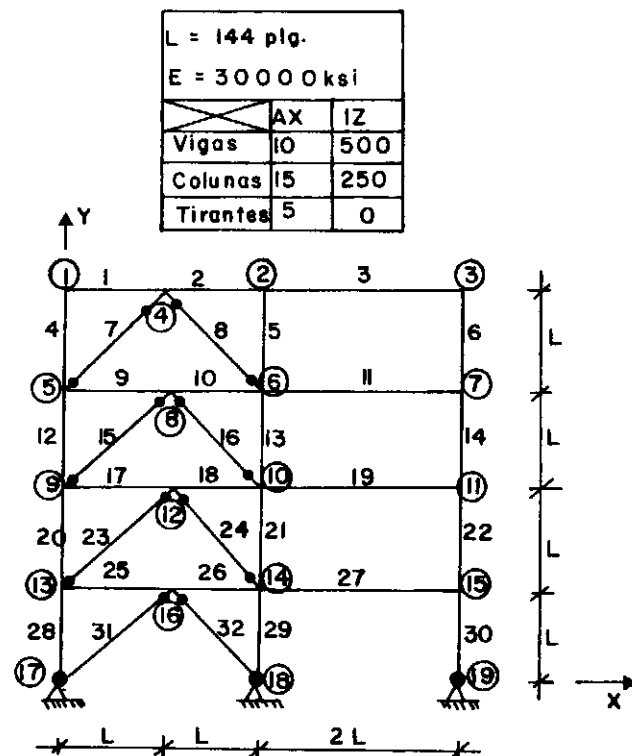


discretizada nas três malhas diferentes, assim como para uma trelça espacial, tipo torre de transmissão, de 207 barras e 66 pontos nodais e para o pórtico plano de 32 barras e 19 pontos nodais (esquemmatizados na Fig. 5.16). A notação usada na tabela corresponde:

- A - Área total de  $\underline{S}$  (MMxN)
- B - Número de coeficientes montados em  $\underline{S}$
- C - Percentual = (ítem B / ítem A ) x 100
- D -  $\underline{S}$  funciona apenas como área de trabalho durante a triangularização. Os coeficientes abaixo da diagonal na coluna k não são zerados no passo k da triangularização. Este ítem fornece a porcentagem da área  $\underline{S}$  ocupada no final.
- E - Número de coeficientes da matriz triangular superior armazenados em  $\underline{U}$  pela técnica de altura efetiva de coluna.
- F - Percentual dos coeficientes de  $\underline{U}$  armazenados = PUAT =  $= \text{ítem E} \times 100/N^2$
- G - Índice de aproveitamento da altura efetiva de coluna. Porcentagem dos não nulos armazenados dentro da altura efetiva de  $\underline{U}$  (IPNNU).
- H - Porcentagem dos não nulos que existiriam entre os coeficientes armazenados se fosse usada a técnica da largura de faixa constante  $[\text{ítem G} \times \text{ítem E} / (N \times LF)]..$



I-Treliza espacial com 207 barras e 66 pontos nodais



II- Pórtico plano com 32 barras e 19 pontos nodais.

ESTRUTURA		EL. FINITOS TRIANG. (FIG.5.9)					FIG. 5.16	
ELEMENTOS		CST			LST		TRELIÇA ESPACIAL	PÓRTICO PLANO
MALHA		1	2	3	1	2		
ÍTEM RE-LATIVOS A S	A	216	2592	11664	1944	25920	37260	4896
	B	75	330	765	256	1089	522	315
	C	35%	13%	6,6%	13%	4,2%	1,4%	6,4%
	D	45%	48%	47%	55%	49%	43%	47%
ÍTEM RE-LATIVOS A U	E	56	260	682	322	1872	4267	609
	F	39%	20%	13%	25%	13%	13%	23%
	G	85%	90%	90%	88%	87%	61%	85%
	H	66%	81%	85%	56%	65%	48%	68%

Quadro 5.11 - ÍNDICES DE ESPARSIDADE RELATIVOS ÀS TÉCNICAS DOS DOIS APONTADORES E DE ALTURA EFETIVA DE COLUNA

Estes resultados permitem-nos concluir que, apesar dos baixos índices de esparsidade logo após a montagem de  $S$ , a área de trabalho durante a triangularização se enche (quase a metade), dificultando o trabalho através da técnica dos dois apontadores. A área que fica cheia corresponde praticamente à área da banda de largura variável. Assim, era de se esperar uma redução enorme no tempo de computação para o armazenamento e operação pela técnica da banda variável, o que foi comprovado e é mostrado logo adiante. Como aperfeiçoamento da técnica poderia ser tentado aproveitar a área sob a diagonal de  $S$  à medida em que fosse sendo zerada, reduzindo o índice de armazenamento da área  $S$  durante a triangularização.

O ítem G da tabela comprova a eficiência da técnica da altura efetiva de coluna com resultados superiores àqueles relativos à aplicação da técnica da faixa de largura constante [ economiza 648 posições na malha 2 (LST) relativamente ao armazenamento em faixa (22%); economiza 1133 posições na treliça espacial (13%) ].

#### 5.3.d - CONSIDERAÇÕES SOBRE O TEMPO E GASTO DE MEMÓRIA

O grau de competitividade de um programa depende em grande parte do tempo de processamento deste em relação aos demais programas existentes. Para conseguirmos economizar temos que minimizar o número de operações e de transferências (I/O) , juntamente com o gasto de memória do computador. Por isto é necessária uma enorme pesquisa sobre o melhor algoritmo e a melhor forma de armazenamento a ser empregada. Assim, a otimização de qualquer processo depende do trabalho de uma equipe inteira. No presente trabalho, limitamo-nos a delinear alguns aspectos do problema através de pesquisas como a que foi feita no Capítulo IV. Somente depois da otimização de todas as técnicas empregadas na aplicação do processo, comparações mais reais sobre o tempo computacional poderão ser feitas.

Na referência [1] comparam-se os dois métodos (o do fator natural e o clássico) do ponto de vista do número de operações. Apresentamos em seguida alguns dados ali fornecidos, juntamente com os obtidos no programa desenvolvido, para treliças espaciais, pela técnica de banda variável, para cada uma das eta

pas de resolução do problema.

Quando  $\underline{F}_i$  é obtido a partir da integração numérica (eq. 2.37), temos  $[6p \cdot (\ell_i^2 + 2\ell_i)]$  multiplicações. Para obter  $\underline{k}_i$ , da mesma forma, são necessárias  $[3p \cdot (\ell_i^2 + 4\ell_i)]$  (eq. 2.36).

As operações feitas no método clássico devem utilizar a precisão dupla do computador enquanto que no método do fator natural podem ser executadas em precisão simples.

A montagem da matriz  $\underline{S}$  (eq. 1.33) não envolve nenhuma operação na verdade. O tempo gasto até este ponto, no programa desenvolvido, é de aproximadamente 10% do tempo gasto empregando-se o método clássico. Observe-se que, neste caso da treliça espacial, o fator  $\underline{F}_i$  é formulado explicitamente, não exigindo nenhuma transformação.

No método clássico, a montagem da matriz de rigidez da estrutura (eq. 1.23), com a adição de coeficientes nas mesmas posições de  $\underline{K}$ , pode exigir um elevado número de transferências.

A etapa de obtenção do fator de Cholesky  $\underline{U}$  (eq. 1.36) é crítica neste processo. O método de Householder exige  $[2/3 n^3]$  multiplicações e  $n$  raízes quadradas, enquanto que por Cholesky temos  $[n^3/6]$  multiplicações e  $n$  raízes (referência [12]). Assim, faz-se necessária uma programação eficiente das técnicas de esparsidade, uma numeração ótima (renumeração) da matriz  $\underline{S}$  e o emprego de computadores rápidos para que não gastemos aqui um tempo excessivo. O sistema ASKA, trabalhando se

gundo o esquema de partição em blocos (hipermatrizes), tem estas operações matriciais programadas diretamente em linguagem máquina do CDC-6600.

Comparamos, em seguida, os tempos de cálculo da estrutura de treliça espacial da figura (5.16) pelas seguintes técnicas:

I - Técnica de esparsidade com dois apontadores (triangularização por Gram-Schmidt)

II - Técnica de banda variável (Householder)

III - Método clássico com semibanda de largura variável (Gauss).

ETAPA MÉTODO	LEITURA, GERAÇÃO E MONTAGEM	RESOLUÇÃO DO SISTEMA RESULTADOS	TOTAL
I	5,6s	147,3s - 96%	152,9s
II	5,8s	80,5s - 93%	86,3s
III	22,6s	58,3s - 72%	80,9s

Quadro 5.12 - TEMPO (SEG.) DE RESOLUÇÃO DA TRELIÇA ESPACIAL DA FIG. 5.16

Conclui-se que a técnica de banda variável é bastante adequada para este caso, reduzindo o tempo de resolução a 56% do obtido em I. Apesar disto, não se conseguiu igualar em tempo a resolução pelo método clássico porque a matriz  $S$  não é simétrica, sendo necessário trabalhar com a banda toda (além da desvantagem do número de operações, visto acima). Para outro

exemplo de treliça espacial com 486 barras e 144 pontos nodais obtivemos os seguintes resultados:

MÉTODO	TÉCNICA	TEMPO TOTAL (seg)	PARCELA REFERENTE À RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES
Fator natural-Householder	Banda variável	531	96%
Clássico Gauss	Semibanda de largura variável	319	58%

Quadro 5.13

A etapa de substituições sucessivas e cálculo de forças ou tensões nos elementos exige um igual número de operações tanto no método do fator natural quanto no clássico.

Como a matriz  $S$  é retangular e não simétrica, no programa implementado, trabalhando com a técnica da banda variável, gasta-se, no mínimo, o dobro da área de armazenamento da aquela necessária no método clássico. Esquemas de armazenamento mais sofisticados, como o de blocos, hipermatrizes ou técnicas de esparsidade possibilitariam um armazenamento mais econômico.

Comparamos também os tempos de resolução do pórtico plano da figura (5.16) pelas seguintes técnicas:

I - Técnica de esparsidade com dois apontadores (Gram - Schmidt)

II - Armazenamento da matriz completa (Householder)

ETAPA MÉTODO	LEITURA, GERAÇÃO E MONTAGEM	RESOLUÇÃO DO SISTEMA RESULTADOS	TOTAL
I	2,7s	12,8s - 83%	15,5
II	2,6s	27,9s - 91%	30,5

Quadro 5.14 - TEMPO (SEG) DE RESOLUÇÃO DO PÓRTICO PLANO DA FIG.5.16

Evidentemente, a técnica de esparsidade leva grande vantagem sobre o armazenamento da matriz completa, reduzindo o tempo de resolução à metade.

Por último, apresentamos os tempos obtidos para cada uma das etapas de resolução da estrutura da Fig. 5.9, para as diversas malhas, utilizando o CST e o LST. Utilizou para isto a técnica de esparsidade dos dois apontadores e a triangularização de Gram-Schmidt. Comparam-se os tempos com aqueles obtidos pela utilização do sistema LORANE [35].

ELEMENTOS	CST			LST	
MALHAS	1	2	3	1	2
Leitura e geração dos dados	0,3	0,3	0,6	0,3	0,7
Montagem de $\tilde{S}$	0,3	0,5	1,4	0,8	2,5
Cálculo dos deslocamentos	0,2	3,6	18,5	3,6	84,4
Cálculo das deformações e tensões	0,2	0,4	0,8	0,8	-
Total do programa	1,0	4,8	21,3	5,5	-
Total do LORANE	2,9	11,4	25,9	12,0	-

Quadro 5.15 - TEMPOS (SEG) PARA RESOLUÇÃO DA ESTRUTURA DA FIG.5.9



## CAPÍTULO VI

### CONCLUSÕES

O método do fator natural leva grandes vantagens sobre o método clássico em problemas mal condicionados. A precisão dos resultados é função do número de condicionamento das matrizes utilizadas no cálculo estrutural. Como o número de condicionamento do fator natural é a raiz quadrada da da matriz de rigidez conclui-se que os resultados obtidos pelo novo método terão um maior número de dígitos corretos. Isto permite usar a precisão simples dos grandes computadores, como também, aproveitar de forma bem melhor a capacidade de memória dos minicomputadores.

As estruturas mal condicionadas são aquelas que têm partes muito rígidas ou muito flexíveis em relação às outras. Um carregamento na direção menos rígida da estrutura acentua as dificuldades numéricas. Uma diferença relativa entre as inércias de elementos de uma estrutura da ordem de 40 vezes provoca erros na 9<sup>a</sup> casa decimal (quadro 5.9). Simplificações de cálculo através da representação de partes sem rigidez por uma inércia nula ou, ao contrário, de partes muito rígidas por grandes inércias, podem conduzir a grandes erros numéricos (no 4º algarismo significativo; ver Quadro 5.8 ).

Os métodos de transformações ortogonais contribuem também para a estabilidade do método, por não permitirem a

alteração da norma das matrizes durante o cálculo do fator de Cholesky. Não há necessidade da escolha do pivot como no método de Gauss, nem de que a matriz seja positiva definida, como no método de Cholesky. A estabilidade dos métodos de Householder e Gram-Schmidt foi comprovada através da utilização das matrizes mal condicionadas de Hilbert.

Para ampliar a capacidade de resolver problemas estruturais do novo método resta desenvolver as formas de armazenamento. A técnica de esparsidade dos dois apontadores poderá ser melhorada através de um estudo da numeração dos nós e elementos estruturais ou de uma reordenação que minimize o aparecimento de coeficientes não nulos em posições anteriormente nulas. O endereçamento sugerido na referência [27] através de blocos de submatrizes faria também com que fosse economizado um grande número de operações e testes. Outro caminho a seguir neste sentido pode ser também o da elaboração da técnica da banda variável introduzida no presente estudo. Apontadores para os elementos i iniciais e finais de cada coluna da matriz assim como a técnica de partição em blocos com largura de banda variável são essenciais para isto. A técnica de subestruturas, aqui apenas delineada, deve ser desenvolvida e utilizada para possibilitar o cálculo de grandes estruturas com elevado número de incógnitas. Os algoritmos exigem uma otimização e uma programação eficiente para minimizar o tempo, especialmente durante a etapa de transformações ortogonais.

A aplicação deste método à análise dinâmica de estruturas é o próximo passo neste caminho. Os resultados obti-

dos na referência [34] mostram-se bastante promissores. No cálculo dos autovalores e autovetores a garantia da precisão dos resultados e da estabilidade do método são também essenciais.

BIBLIOGRAFIA

- 1 - BRÖNLUND, O.E. - "Computation of the Cholesky Factor of a Stiffness Matrix Direct form the Factor of its Initial Quadratic Form", IKO Software Service GmbH - ISD Report nº 142 Stuttgart, May 1973.
- 2 - ARGYRIS, J.H. and BRÖNLUND, O.E. - "The Natural Factor Formulation of the Stiffness for the Matrix Displacement Method", IKO Software Service, A.S., Oslo. Publicado na Revista Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 5 (1975), 97-119.
- 3 - WILHELMY, Viktor - "On the Element Stiffness Factor Formulation" - IKO Software Service, Stuttgart - Publicado na Revista Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 11 (1977), 75-95
- 4 - GERE, J.M. and WEAVER, Jr. W. - "Análises de Estruturas Reticulares" - C.E.C.S.A. (4<sup>a</sup> Edição - 1974).
- 5 - VENÂNCIO Fº, F. - "Análise Matricial de Estruturas " (Estática, Estabilidade, Dinâmica) - Almeida Neves, Ltda.(1975).
- 6 - COOK, R.D. - "Concepts and Applications of Finite Element Analysis" - John Wiley and Sons, Inc. (1974).
- 7 - ZIENKIEWICZ, O.C. - "The Finite Element Method in Engineering Science" - McGraw-Hill (1967).
- 8 - BREBBIA, C.A. and FERRANTE, A.J. - "The Finite Element Technique" - Editora URGs - Porto Alegre (1975).
- 9 - ROSANOFF, R.A. and GINSBURG, T.A. - "Matrix Error Analysis

for Engineers" - Matrix Methods in Struc. Mech. Conference  
Wright-Patterson (Nov/1966).

- 10- ROY, J.R. - "Numerical Error in Structural Solutions", Journal  
of the Structural Division - Proceedings of the American  
Society of Civil Engineers (April/1971).
- 11- JOHNSEN, Th. L. and ROY, J.R. - "On Systems of Linear Equations  
of the Form  $A^T Ax=b$  Error Analysis and Certain Consequences  
for Structural Applications" - Publicado na Revista Comp.  
Meth. Appl. Mech. Eng. 3 (1974), 357-374.
- 12- WILKINSON, J.H. - "The Algebraic Eigenvalue Problem"- Oxford  
University Press, Oxford (1965).
- 13- FORSYTHE, G. and MOLER, C.B. - "Computer Solution of Linear  
Algebraic Systems" - Prentice Hall (1967).
- 14- JENNINGS, A. - "Matrix Computation for Engineers and Scientists"  
A Wiley-Interscience Publication, Belfast (1977).
- 15- TABORDA GARCIA, L.F. - "Análise Não-linear de Pórticos Planos  
de Concreto Armado" - Tese de Mestrado na COPPE/UFRJ (1974).
- 16- GERE, J.M. and WEAVER, Jr. W. - "Matrix Algebra for Engineers",  
D. Van Nostrand Company (1965).
- 17- BATHE, K.J. and WILSON, E.L. - "Numerical Methods in Finite  
Element Analysis" - Prentice-Hall, Inc. (1976).
- 18- BRÖNLUND, O.E. and JOHNSEN, T.L. - "The Hypermatrix QR  
Factorization, a Hypermatrix Generalization of Householder's  
Method" - ISD - Report N° 112 - Stuttgart (1971).

- 19- PRZEMIENIECKI, J.S. - "Theory of Matrix Structural Analysis",  
McGraw-Hill Book Company (1968).
- 20- GUYAN, R.J. - "Reduction of Stiffness and Mass Matrices",  
J.A.I.A.A., Vol. 3, nº 2, pag. 380 (1965).
- 21- BRAUN, K.A. and JOHNSEN, Th.L. - "Eigencomputation of Symmetric  
Hypermatrices using a Generalization of the Householder  
Method" - Lecture given at the Second International Conference  
on Structural Mechanics in Reactor Technology, Berlin, 10-  
14 Sep/1973.
- 22- BRÖNLUND, O.E. and JOHNSEN, Th. L. - "QR Factorization of  
Partitioned Matrices" - Publicado na Revista Comp. Meth. Appl.  
Mech. Eng. 3(1974) 153-172.
- 23- DIETRICH, G. - "A New Formulation of the Hypermatrix House-  
holder-QR Decomposition" - Publicado na Revista Comp, Meth.  
Appl. Mech. Eng. 9 (1976), 273-280.
- 24- VOLD, H. - "Substructure Analysis with Linear Constraints  
using the Natural Factor Formulation" - Publicado na Revista  
Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 10 (1977) 151-163.
- 25- BALMER, H.A. - "General Beam Element for ASKA" - ISD-Report  
nº 75, Stuttgart (1969).
- 26- DUFF, I.S. and REID, J.R. - "A Comparison of Some Methods for  
the Solution of Sparse Overdetermined Systems of Linear  
Equations" - J. Inst. Math.Ap. (1976) 17, 267-280.
- 27- SORIANO, H.L. e PRATES, C.L.M. - "Armazenamento Computacional  
de Matrizes em Análise Estrutural", Publicação didática da

COPPE/UFRJ (1978).

- 28- FUCHS, G.von; ROY, J.R. and SCHREM, E. - "Hypermatrix Solution of Large Sets of Symmetric Positive Definite Linear Equations" Publicado na Revista Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. (April, 1972) 197-216.
- 29- KAMEL, H.A. and McCABE, M.W. - "Direct Numerical Solution of Large Sets of Simultaneous Equations"- Computers and Structures, Vol. 9, pag.113-123 - Pergamon Press Ltda (1978).
- 30- BERRY, R.D. - "An Optimal Ordering of Eletronic Circuit Equations for a Sparse Matrix Solution" - IEEE Transactions on Circuit Theory, Vol.CT-18, nº 1 (Jan,1971).
- 31- NATARAJAN, R. - "Front Solution Program for Transmission Tower Analysis" - Computers and Structures, Vol.5, pag.59-64 Pergamon Press (1975).
- 32- B 6700/7700 FORTRAN Reference Manual.
- 33- ARGYRIS, J.H.; JOHNSEN, Th.L. and MLEJNEK, H.P. - "On the Natural Factor in Nonlinear Analysis" - ISD-Report nº 242, Stuttgart (june,1978).
- 34- SORIANO, H.L. - "O Método de Rutishauser para o Cálculo de Autovalores em Problemas Estruturais" - Tese de Doutorado em elaboração na COPPE/UFRJ.
- 35 - MANUAL DO SISTEMA LORANE .

APÊNDICE



```

FILE 5=IMPRESS,UNIT=PRINTER
FILE 6=CARTOES,UNIT=READCR
FILE 11=FILE11,UNIT=DISKPACK,RECORD=100,AREA=200*2,BLOCKING=20
SUBROUTINE LCR (L,AC,RL,CRL,NJ,X,Y, NLP,NR,NRJ,NLJ,AR,Z,IZ,A
1=AC,POIS,ESP)
C*****
C
C   ESTA SUBROTINA LE AS COORDENADAS,AS PROPRIEDADES FISICAS E GEOME-
C   TRICAS, AS RESTRICOES NODAIS(MONTANDO CRL) E OS CARREGAMENTOS.
C
C   C=VECTOR QUE ARMAZENA O MODULO DE ELASTICIDADE DE CADA ELEMENTO
C   AX=VECTOR QUE ARMAZENA A AREA DE CADA ELEMENTO
C   RL=VECTOR DE RESTRICOES NODAIS ONDE 1 REPRESENTA DIRECAO RESTRINGI-
C   DA E ZERO, DIRECAO LIVRE;CRL=VECTOR DE RESTRICOES NODAIS ACUMULADAS
C   X,Y,Z= VETORES DAS COORDENADAS DOS NOS(CARTESIANAS).
C   AC=VECTOR DE CARGAS NODAIS EQUIVALENTES...AC=AE+A
C   NOP=MATRIZ DAS INCIDENCIAS NODAIS
C   NGD=NUMERO DE GERACOES AUTOMATICAS DIFERENTES
C   NLJ=NUMERO DE NOS LIDOS(NAO GERADOS AUTOMATICAMENTE).
C   ML=NUMERO DE ELEMENTOS CUJAS PROPRIEDADES SAO LIDAS.
C   IZ=INERCIA DA BARRA.
C   ESP=ESPESSURA DO ELEMENTO ;POIS=COEFICIENTE DE POISSON
C   AR=VECTOR DE REACOES NODAIS
C   A=CARGAS APLICADAS DIRETAMENTE NOS NOS DE ELEMENTOS DE PORTICO PL.
C   AML=CARGAS NAS EXTREMIDADES DOS ELEMENTOS DE PORTICO PLANO.
C   LML=LISTA DE MEMBROS CARREGADOS
C   AL=CARGAS NODAIS EQUIVALENTES
C   NLM=NUMERO DE MEMBROS CUJAS CARGAS FORAM SUBSTITUIDAS PELAS ACOES.
C   DE ENGASTAMENTO PERFEITO EM SEUS EXTREMOS
C   NLMC=NUMERO DE MEMBROS COM CARREGAMENTOS NAO SUBSTITUIDOS POR
C   ACOES DE ENGASTAMENTO PERFEITO EM SEUS EXTREMOS
C*****
COMMON/AO/N1,NL,M,N,N2,IG,NCN,NDF,ITE
COMMON/A2/AML
COMMON/A3/LML
COMMON/A4/AE
DIMENSION NOP(N,NCN),ECH(N),AX(M), X(NJ),Y(NJ),Z(NJ),AR(NR),
1POIS(N),ESP(N),AML(100*6),LML(100),AE(100),A(N2),AC(N2)
INTEGER RL(N2),CRL(N2)
REAL IZ(N)
C*****
C   LEITURA E IMPRESSAO DAS COORDENADAS.
C*****
NL=M
NLJ=NJ
READ(NL,/)NGD
IF(NGD.EQ.0)GO TO 100
READ(NL,/)NLJ,ML
DO 90 K=1,NGD
CALL AUTOM(NJ,X,Y,Z,NOP,E,AX,POIS,ESP)
90 CONTINUE
100 WRITE(NI,101)
101 FORMAT(///,120(' '),//,24X,'NO',13X,'COORDX',13X,'COORDY',10X,'COO
1RDZ')
IF(NLJ.EQ.0)GO TO 1011
DO 1010 JCONT=1,NLJ
READ(NL,/)J,X(J),Y(J),Z(J)
1010 CONTINUE
1011 DO 102 JCONT=1,NJ
WRITE(NI,2)JCONT,X(JCONT),Y(JCONT),Z(JCONT)
2 FORMAT( 20X,I5,3(10X,F10.4))
102 CONTINUE
C*****
C   LEITURA E IMPRESSAO DAS PROPRIEDADES DOS ELEMENTOS, CARACTERISTI-
C   CAS ESTRUCTURAIS E INCIDENCIAS NODAIS
C*****
WRITE(NI,4)
4 FORMAT(///,20X,'ELEMENTO',5X,'INCIDENCIA',5X,'AX(ESP)',14X,'E',14X
1,'IZ(OU COEF.POIS.)',//)
IF(ML.EQ.0.AND.ITE.LT.3)GO TO 43
IF(ML.EQ.0.AND.ITE.LT.4)GO TO 45
IF(ML.EQ.0.AND.ITE.LT.6)GO TO 703
IF(ML.EQ.0.AND.ITE.GE.6)GO TO 7030
GO TO(699,699,700,701,701,701,701),ITE
699 DO 20 IC=1,ML
20 READ(NL,/)I,(NOP(I,J),J=1,NCN),AX(I),E(I)
43 WRITE(NI,44)(I,(NOP(I,J),J=1,NCN),AX(I),E(I),I=1,M)
44 FORMAT(22X,I5,3X,I5,2X,I5,2X,F15.4 ,2X,F15.3)
GO TO 705
700 DO 1 IC=1,ML
1 READ(NL,/)I,(NOP(I,J),J=1,NCN),AX(I),E(I),IZ(I)
45 WRITE(NI,5)(I,(NOP(I,J),J=1,NCN),AX(I),E(I),IZ(I),I=1,M)
5 FORMAT(22X,I5,3X,I5,2X,I5,2X,F15.4 ,2X,F15.3,2X,F15.4 )
GO TO 705
701 DO 702 IC=1,ML
702 CONTINUE
READ(NL,/)I,(NOP(I,J),J=1,NCN),ESP(I),L(I),POIS(I)
IF(ITE.EQ.5.OR.ITE.EQ.7)GO TO 702
E(IC)=E(IC)/(1.-POIS(IC)*POIS(IC))
POIS(IC)=POIS(IC)/(1.-POIS(IC))
702 CONTINUE
IF(ITE.EQ.4.OR.ITE.EQ.6)WRITE(NI,1935)
1935 FORMAT(///,10X,'O MODULO DE ELASTICIDADE E O COEFICIENTE DE POISSON
1 SAO MODIFICADOS PARA CONSIDERAR O EST.PL. DE DEFORMACAO ',//)

```

```

IF(ITE.EQ.0)GO TO 7030
703 WRITE(NI,704)(I,(NDF(I,J),J=1,NCN),ESP(I),E(I),POIS(I),I=1,M)
704 FORMAT(2X,I5,3X,I4,1X,I4,1X,I4,1X,F10.4,2X,F10.3,2X,F10.4)
GO TO 705
7030 WRITE(NI,7040)(I,(NDF(I,J),J=1,NCN),ESP(I),E(I),POIS(I),I=1,M)
7040 FORMAT(20X,I5,4X,6I5,1X,I3,4,2X,I7,5)
C*****
C   LEITURA E IMPRESSAO DO VETOR RL. MONTAGEM DO VETOR CRL.
C*****
705 WRITE(NI,6)
6 FORMAT(///,20X,'RESTRICOES NODAIS',///,20X,'ND',10X,'X',10X,'Y',10X
1,'Z')
DO 106 NULO=1,N2
AC(NULO)=0.
CRL(NULO)=0.
106 CRL(NULO)=0.
DO 10 IC=1,NRJ
READ(NL,71)J,(CRL(NDF*(J-1)*K),K=1,NDF)
WRITE(NI,9)J,(CRL(NDF*(J-1)*K),K=1,NDF)
8 FORMAT(20X,I2,3(10X,1))
10 CONTINUE
CRL(1)=RL(1)
DO 11 K=2,N2
11 CRL(K)=CRL(K-1)+RL(K)
C*****
C   LEITURA E IMPRESSAO DO CARREGAMENTO.
C   CARGAS NODAIS (TRELIÇAS PLANAS E ESPACIAIS, CST E LST)
C*****
IF(ITE.EQ.3)GO TO 1691
WRITE(NI,12)
12 FORMAT(///,10X,'ND',13X,'CARGA X',10X,'CARGA Y',10X,'CARGA Z').
DO 26 IC=1,NLJ
READ(NL,7)J,(AC(NDF*(J-1)*K),K=1,NDF)
WRITE(NI,13)J,(AC(NDF*(J-1)*K),K=1,NDF)
13 FORMAT(//,10X,I3,3(8X,F10.4))
26 CONTINUE
DO 30 MVQ=1,N2
AR(MVQ)=0.
IF(CRL(MVQ).EQ.1)GO TO 28
IPOS=MVQ-CRL(MVQ)
AC(IPOS)=AC(MVQ)
GO TO 30
28 AR(MVQ)=-AC(MVQ)
30 CONTINUE
GO TO 2000
C*****
C   CARGAS NODAIS E DISTRIBUIDAS NOS ELEMENTOS DE PORTICAO PLANO
C*****
1691 DO 1692 N3=1,N2
A(N3)=0
AE(N3)=0
AR(N3)=0
1692 CONTINUE
DO 1693 N4=1,M
DO 1694 N5=1,6
AML(N4,N5)=0.
1694 CONTINUE
LML(N4)=0
1693 CONTINUE
READ(NL,64) NLH,NLMC
64 FORMAT(2I5)
WRITE(NI,65)NLJ,NLH,NLMC
65 FORMAT(//10X,'NUMERO DE NOS CARREGADOS',3X,I3,
//10X,'NUMERO DE MEMBROS CUJAS CARGAS FORAM SUBSTITUIDAS PELAS ACO
ES DE ENGASTAMENTO PERFEITO EM SEUS EXTREMOS',3X,I3,
//10X,'NUMERO DE MEMBROS COM CARREGAMENTOS NAO SUBSTITUIDOS POR AC
OES DE ENGASTAMENTO PERFEITO EM SEUS EXTREMOS',3X,I3,///)
IF(NLJ.EQ.0)GO TO 837
WRITE(NI,66)
66 FORMAT(8X,'ACOES APLICADAS EM CADA NO',//,4X,'NO',8X,'A1',8X,'A2',
8X,'A3',//)
DO 1596 J=1,NLJ
READ(NL,60)X,A(3*K-2),A(3*K-1),A(3*K)
60 FORMAT(15,3F10.3)
WRITE(NI,61)X,A(3*K-2),A(3*K-1),A(3*K)
61 FORMAT(3X,I3,3X,3(F10.3))
1596 CONTINUE
837 IF(NLMC.EQ.0)GO TO 810
CALL CAPEM(NLMC)
810 IF(NLM.EQ.0)GO TO 2000
WRITE(NI,67)
67 FORMAT(6X,'ACOES NOS EXTREMOS DOS MEMBROS RESTRINGIDOS DEVIDO AS C
ARGAS',//,2X,'MEMBRO',7X,'AML1',6X,'AML2',6X,'AML3',6X,'AML4',6X,'
AML5',6X,'AML6',//)
DO 1597 J=1,NLM
READ(NL,69)I,AML(I,1),AML(I,2),AML(I,3),AML(I,4),AML(I,5),AML(I,6)
LML(I)=1
69 FORMAT(15,6F10.3)
WRITE(NI,71)I,AML(I,1),AML(I,2),AML(I,3),AML(I,4),AML(I,5),AML(I,6)
71 FORMAT(3X,I5,3X,6F10.3)
1597 CONTINUE
2000 RETURN
END

```

```

SUBROUTINE AUTOMENJ,X,Y,Z,NOP,C,AX,POIS,ESP)
COMMON/NO/N1,N2,N3,M,N,N2,IG,NCH,NBF,ITE
DIMENSION X(NJ),Y(NJ),Z(NJ),NOP(M,NCH),E(H),AX(H),ITRAB(330),POIS(
1H),ESP(H)
C*****
C GERACAO AUTOMATICA DAS COORDENADAS, INCIDENCIAS NODAIS E PROPRIE-
DADES DA ESTRUTURA.
C*****
IF(ITE.GE.4)GO TO 100
C*****
C TRELICA ESPACIAL
C*****
READ(NL,/)DISTX,DISTY,DISTZ,NUCOX,NUCOZ,ALT,ITIP,J,I,D XI,DYI,DZI
1,ELAST,AREA
C*****
C DISTX,DISTY,DISTZ=DISTANCIA ENTRE OS NÓS NA DIRECAO X,Y E Z RESPEC-
TIVAMENTE.
C NUCOX,NUCOZ=NUMERO DE COLUMAS NAS DIRECOES X E Z.
C ALT=ALTURA DA ESTRUTURA
C NUPOX,NUPOY=NUMERO DE PONTOS DA MALHA DE ELEMENTOS FINITOS NAS
DIRECOES X E Y.
C ITIP=QUANTIDADE DE TIPOS DE ELEMENTOS DIFERENTES NA ESTRUTURA.
C J,I= INDICES DO ULTIMO PONTO NODAL E DO ULTIMO ELEMENTO FORNECI-
DOS A PARTIR DOS QUAIS SE FARA ESTA GERACAO AUTOMATICA.
C D XI,DYI,DZI=DISTANCIAS X,Y,Z INICIAIS DO PRIMEIRO PONTO NODAL
C DE CADA GERACAO AUTOMATICA.
C*****
NAY=IFIX(ALT/DISTY)+1
DO 90 IY=1,NAY
DO 90 IX=1,NUCOX
DO 90 IZ=1,NUCOZ

J=J+1
X(J)=(IX-1)*DISTX+D XI
Y(J)=(IY-1)*DISTY+DYI
Z(J)=(IZ-1)*DISTZ+DZI
IF(IZ.EQ.NUCOZ)GO TO 60
I=I+1
NOP(I,1)=J
NOP(I,2)=J+1
60 IF(IX.EQ.NUCOX)GO TO 70
I=I+1
NOP(I,1)=J
NOP(I,2)=J+NUCOZ
70 IF(IY.EQ.NAY)GO TO 90
I=I+1
NOP(I,1)=J
NOP(I,2)=J+NUCOZ*NUCOX
IF(IZ.EQ.NUCOZ)GO TO 80
I=I+1
NOP(I,1)=J
NOP(I,2)=J+NUCOZ*NUCOX+1
80 IF(IX.EQ.NUCOX)GO TO 90
I=I+1
NOP(I,1)=J
NOP(I,2)=J+NUCOZ*(NUCOX+1)
90 CONTINUE
DO 95 I=1,M
E(I)=ELAST
95 AX(I)=AREA
GO TO 200
C*****
C ELEMENTOS FINITOS TRIANGULARES
C*****
100 READ(NL,/)DISTX,DISTY,NUPOX,NUPOY,J,I,D XI,DYI,POISS,ESPES,ELAST
IF(ITE.GE.6)GO TO 191
DO 190 IX=1,NUPOX
DO 190 IY=1,NUPOY
J=J+1
X(J)=D XI+(IX-1)*DISTX
Y(J)=DYI+(IY-1)*DISTY
IF(IY.EQ.NUPOY.OR.IX.EQ.NUPOX)GO TO 190
I=I+1
NOP(I,1)=J
NOP(I,2)=J+NUPOY
NOP(I,3)=J+1
I=I+1
NOP(I,1)=J+NUPOY
NOP(I,2)=J+NUPOY+1
NOP(I,3)=J+1
190 CONTINUE
GO TO 1930
191 DO 193 IX=1,NUPOX
IF(IX.NE.1)J=J+2*NUPOY-1
DO 193 IY=1,NUPOY
J=J+1
X(J)=D XI+(IX-1)*DISTX
Y(J)=DYI+(IY-1)*DISTX
IF(IY.EQ.NUPOY)GO TO 192
J1=J+1
X(J1)=X(J)
Y(J1)=Y(J)+DISTY/2.
192 IF(IX.EQ.NUPOX)GO TO 193
J2=J+NUPOY+2-1
X(J2)=X(J)+DISTX/2.
Y(J2)=Y(J)

```

```

J4=J2+1
X(J4)=X(J)
Y(J4)=Y(J)
IF(IY.EQ.VUPQY)GO TO 193
I=I+1
NOP(I,1)=J
J3=J+VUPQY*4-2
NOP(I,2)=J3
NOP(I,3)=J+2
NOP(I,4)=J2
NOP(I,5)=J2+1
NOP(I,6)=J1
I=I+1
NOP(I,1)=J3
NOP(I,2)=J3+2
NOP(I,3)=J+2
NOP(I,4)=J3+1
NOP(I,5)=J2+2
NOP(I,6)=J2+1
193 IF(IY.NE.VUPQY)J=J+1
1930 IF(ITE.EQ.5.OR.ITE.EQ.7)GO TO 194
ELAST=ELAST/(1.-POISS*POISS)
POISS=POISS/(1.-POISS)
WRITE(NI,1935)
1935 FORMAT(//,10X,'O MODULO DE ELASTICIDADE E O COEFICIENTE DE POISSON
1 SAO MODIFICADOS PARA CONSIDERAR O EST.PL. DE DEFORMACAO ',//)
194 DO 195 I=1,M
E(I)=ELAST
POIS(I)=POISS
195 ESP(I)=ESPES
200 RETURN
END

```

```

SUBROUTINE CAEPEN(NLNC)
*****
C ESTA SUBROUTINA CALCULA AS ACÇÕES DE ENGASTAMENTO PERFEITO NOS
C ELEMENTOS CARREGADOS
C *****
COMMON/AQ/NI,NL,M,N,N2,IG,NCN,NDF,ITE
COMMON/A2/AML
COMMON/A3/LML
DIMENSION AML(100,6),LML(100)
REAL MA,L
DO100J=1,M
DO100K=1,6
100 AML(J,K)=0
DO 1 JB=1,NLNC
READ(NL,20)I,NC,
LML(I)=I
20 FORMAT(2I5)
DO 2K=1,NC
READ(NL,10)ICOD
10 FORMAT(I5)
READ(NL,11)F,A,B,MA,Q1,Q2,S,T
11 FORMAT(8F10.0)
L=A*B
*****

```

CALCULO PARA CARGA CONCENTRADA NA DIRECAO YM

```

GO TO (3,4,5,6,8)ICOD
3 WRITE(NI,82)I
82 FORMAT(//10X,'CARGA CONCENTRADA DIRECAO YM',15(' '),MEMBRO ',I3)
WRITE(NI,91)F,A,B
AML(I,3)=AML(I,3)-F*A*B**2/L**2
AML(I,6)=AML(I,6)+F*A**2*B/L**2
AML(I,2)=AML(I,2)-F*B**2/L**2*(3-2*B/L)
AML(I,5)=AML(I,5)-F*A**2/L**2*(3-2*A/L)
GO TO 2

```

CALCULO PARA CARREGAMENTO DISTRIBUIDO AO ELEMENTO

CALCULO DA PARTE RETANGULAR DESTE CARREGAMENTO

```

4 WRITE(NI,83)I
83 FORMAT(//10X,'CARREGAMENTO DISTRIBUIDO DIRECAO YM ---MEMBRO ',I3)
WRITE(NI,80)Q1,Q2,S,A,B
80 FORMAT(//10X,'Q1=',F10.3,
//10X,'Q2=',F10.3,//10X,'S=',F10.3,//10X,'A=',F10.3,//10X,'B=',F10.
3)
QR=Q1
IF(ABS(Q1).GT.ABS(Q2))QR=Q2
C=S/2
AML(I,3)=AML(I,3)-2*QR*C*(A*B**2/L**2-C**2/L**2*(3*B-L)/3)
AML(I,6)=+2*QR*C*(B*A**2/L**2-C**2/L**2*(3*A-L)/3)+AML(I,6)
AML(I,2)=AML(I,2)-2*QR*C*(1-3*A**2/L**2-C**2/L**2+2*A/L*(A**2/L**2
+C**2/L**2))
AML(I,5)=AML(I,5)-2*QR*C*(3*A**2/L**2+C**2/L**2-2*A/L*(A**2/L**2+C
**2/L**2))

```

```

C      CALLULO DA PARTE TRIANGULAR DESTA CARREGAMENTO
C
C      Q=ABS(Q1)-ABS(Q2)
C      I1=Q1-2.7
C      Q=Q-Q1
C      A=A+Q/6
C      A=A-S/3
C      B=A/3
C      U=L-B+1/3.*S
C      W=1./2.*Q+S
C      R1=W/L-2*(3+D)=2-1./6*S+2+1./3*B+S+2/L-17*S+3/(135*L)-2*D+3/L
C      R2=-R1
C      XH1=W/L*(Q+3/L+1./9*S+2+51./810*S+3/L-1./6*S+2*B/L-D+2)
C      XH2=W/L*(Q+3/L+1./9*S+2+51./810*S+3/L-1./6*S+2*B/L-D+2)
C      AML(1,2)=AML(1,2)-R1
C      AML(1,5)=AML(1,5)-R2
C      AML(1,3)=AML(1,3)+XH1
C      AML(1,6)=AML(1,6)+XH2
C      GO TO 2
C
C      Q=Q1-Q2
C      A=B+Q/2
C      B=A/3
C      U=L-B+1/3.*S
C      W=1./2.*Q+S
C      R2=W/L-2*(3+D)=2-1./6*S+2+1./3*B+S+2/L-17*S+3/(135*L)-2*D+3/L
C      R1=-R2
C      XH1=W/L*(Q+3/L+1./9*S+2+51./810*S+3/L-1./6*S+2*B/L-D+2)
C      XH2=W/L*(Q+3/L+1./9*S+2+51./810*S+3/L-1./6*S+2*B/L-D+2)
C      AML(1,2)=AML(1,2)-R1
C      AML(1,5)=AML(1,5)-R2
C      AML(1,3)=AML(1,3)+XH1
C      AML(1,6)=AML(1,6)+XH2
C      GO TO 2
C      *****
C
C      CALLULO PARA MOMENTO CONCENTRADO
C
C      5 WRITE(NI,80)
C      80 FORMAT(//10X,'MOMENTO APLICADO DIRECAO ZM',15('-'),'MEMBRO',13)
C      WRITE(NI,81)A,B
C      81 FORMAT(//10X,'7/17MA='F10.3//10X,'A='F10.3//10X,'B='F10.3)
C      AML(1,3)=AML(1,3)+MA*B/L*(2-3*B/L)
C      AML(1,6)=AML(1,6)+MA*A/L*(2-3*A/L)
C      AML(1,2)=AML(1,2)+MA*6*A*B/L+3
C      AML(1,5)=AML(1,5)+MA*6*A*B/L+3
C      GO TO 2
C      *****
C
C      CALLULO PARA CARGA CONCENTRADA NA DIRECAO XM
C
C      6 WRITE(NI,85)
C      85 FORMAT(//10X,'CARGA CONCENTRADA DIRECAO XM',15('-'),'MEMBRO',13)
C      AML(1,1)=AML(1,1)-T*B/L
C      WRITE(NI,81)A,B
C      AML(1,4)=AML(1,4)-T*A/L
C      GO TO 2
C      *****
C
C      CALLULO PARA CARGA DISTRIBUIDA NA DIRECAO XM
C
C      8 WRITE(NI,84)
C      84 FORMAT(//10X,'CARREGAMENTO DISTRIBUIDO DIRECAO XM ----MEMBRO',13)
C      WRITE(NI,80)Q1,Q2,S,A,B
C      Q=ABS(Q2-Q1)
C      QR=ABS(Q1+Q2)
C      XG=L*(A+S/6)+2*Q1*A/QR
C      B=L-XG
C      T=QR/2+S
C      AML(1,1)=AML(1,1)-T*B/L
C      AML(1,4)=AML(1,4)-T*XG/L
C      2 CONTINUE
C      WRITE(NI,67)
C      67 FORMAT(//10X,'ACOES DE ENG/STAMENTO PERFEITO DEVIDO AS CARGAS',
C      *//1X,'MEMBRO',7X,'AML1',6X,'AML2',6X,'AML3',6X,'AML4',6X,'
C      *AML5',6X,'AML6',7)
C      WRITE(NI,71)1,AML(1,1),AML(1,2),AML(1,3),AML(1,4),AML(1,5),AML(1,6)
C      71 FORMAT(3X,15,3X,6F10.3)
C      1 CONTINUE
C      RETURN
C      END

```

```

SUBROUTINE MONESP(E,AX,IZ,CRL,X,Y,Z,NOP,NJ,RL,NPEQ,AC,A,AR,IVT1,
1 IVT2,POIS,ESP,MR)
C *****
C ESTA SUBROTINA MONTA A MATRIZ DE RIGIDEZ FATORADA.
C UTILIZA-SE O ARMAZENAMENTO DE MATRIZES ESPARSA COM DOIS APONTADO-
C RES - O PRIMEIRO PARA A COLUNA E O SEGUNDO PARA A POSICAO DO
C PRIMEIRO NAO NULO DE CADA LINHA DE S.
C RESP:ATIVANTE L1 E L2.
C FAZ-SE LUGO EM SEGUINJA A TRANSFERENCIA PARA A AREA SC,EM QUE S
C PASSA A TER OS COEFICIENTES MONTADOS POR COLUNA,COM OS APONTADORES
C NLI,PARA O NUMERO DA LINHA, E IIC COMO INDICADOR DO ELEMENTO INICI-
C AL DA COLUNA DENTRO DE SC.
C SE FAZ O DA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL,RETANGULAR, CONTENDO APENAS OS
C COEFICIENTES REFERENCIAS AS DIRECOES LIVRES, ARMAZENADA POR LINHAS
C DE FORMA UNIDIMENSIONAL.
C XCL,YCL,ZCL=VETORES CONTENDO AS DISTANCIAS NOS EIXOSX,Y,Z ENTRE
C AS CENTREIDADES DOS ELEMENTOS FL=VETOR CONTENDO O COMPRIMENTO DOS
C ELEMENTOS FL=VETOR QUE ARMAZENA EM CADA POSICAO AS COLUNAS DE S
C CONTENDO OS COEFICIENTES NAU AULOS FL2=VETOR QUE ARMAZENA NA 1-ESIMA
C POSICAO A POSICAO DO VETOR S DO PRIMEIRO NAO NULO DA 1-ESIMA LINHA
C DA MATRIZ S=PEQ=NUMERO MUITO PEQUENO R=NUMERO DE ELEMENTOS NAU
C NULOS MONTADOS.
C *****
COMMON/AR/RI,RL,M,N,NZ,IC,NC,NUF,ITE
COMMON/AS/SH,R,SMR
COMMON/AZ/AML
COMMON/AS/ENL
COMMON/A4/AL
COMMON/AS/AL(15000),L1(15000),L2(3000),SC(15000),NLI(15000),IIC(300)
DIRM=100*(M+NC),E(H),X(H),X(NJ),Y(NJ),Z(NJ),LAL(100)
1,SH(6,6),XCL(100),YCL(100),ZCL(100),H(100,3,3),SMR(6,6),AL(150),
2,AML(100,6),AUL(100,1),ALN(2),R(NR),IV1(12),IV2(12),POIS(M),ESP(M)
3,BE1(3),BE2(3),H(3,6),F(3,6)
INTER=RL(NZ),CRL(12)
REAL L(100),NPEQ,IZ(H)

```

```

00 2 J=1,N
1VT1(J)=0
1VT2(J)=0
2 1IC(J)=0
IF(ITE.EQ.5)GO TO 200
IF(ITE.EQ.4.OR.ITE.EQ.5)GO TO 282
IF(ITE.GT.6)GO TO 2980
K=0
ISINA=-1
C*****
C MONTAGEM DO VEIUR S ESPECIFICA PARA INELICA ESPACIAL E PLANA
C*****
00 25 I=1,M
L2(I)=0
JJ1=NOP(I,1)
JK1=NOP(I,2)
XCL(I)=X(JA1)-X(JJ1)
YCL(I)=Y(JA1)-Y(JJ1)
ZCL(I)=Z(JA1)-Z(JJ1)
L(I)=SQRT(XCL(I)*XCL(I)+YCL(I)*YCL(I)+ZCL(I)*ZCL(I))
WRITE(16,1)XCL(I),YCL(I),ZCL(I),L(I)
CX=XCL(I)/L(I)
CY=YCL(I)/L(I)
CZ=ZCL(I)/L(I)
CONST=SQRT(L(I)*AX(I)/L(I))
00 17 JJ=1,NCA
ISINA=-ISINA
E=CX
00 19 KK=1,NCF
J=NCF*(NOP(I,JJ)-1)+KK
IF(RL(J).NE.1)GO TO 15
13 IF(NF-KA-1)10,140,135
135 C=CY
GO TO 10
140 C=CZ
IF(ITE.EQ.1)C=CY
GO TO 10
15 NCO=J-CRL(J)
IF(ABS(C).LT.NPEQ)GO TO 13
N=K+1
S(K)=C*CONST*ISINA
L1(K)=NCO
1VT1(NCO)=1VT1(NCO)+1
IF(L2(I))16,16,13
16 L2(I)=K
GO TO 13
10 CONTINUE
17 CONTINUE
20 CONTINUE
NM=M
GO TO 300
200 K=1
C*****
C MONTAGEM ESPECIFICA PARA PORTICO PLANO
C*****
00 250 I=1,M
00 201 IZERA=1,3
IZER=3*(I-1)+IZERA
201 L2(IZER)=0
JJ1=NOP(I,1)
JK1=NOP(I,2)
XCL(I)=X(JA1)-X(JJ1)
YCL(I)=Y(JA1)-Y(JJ1)
L(I)=SQRT(XCL(I)*XCL(I)+YCL(I)*YCL(I))
CX=XCL(I)/L(I)
CY=YCL(I)/L(I)
R(I,1,1)=CX
R(I,1,2)=CY
R(I,1,3)=0.
R(I,2,1)=CY
R(I,2,2)=-CX
R(I,2,3)=0.
R(I,3,1)=0.
R(I,3,2)=0.
R(I,3,3)=-1.
J1=3*JJ1-2
J2=3*JJ1-1
J3=3*JJ1
N1=3*JK1-2
N2=3*JK1-1
N3=3*JK1
C*****
C *** CALCULO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO
C *****
CALL RECC(I),IZ(I),AX(I),L(I)
C *** CHAMADA DA SUBROTINA CALCULADORA DE SHR
CALL SMRD(I,J1,J2,J3,N1,N2,N3)
C *****
C1=SQRT(L(I)/L(I))
C2=C1*SQRT(AX(I))
C3=C1*SQRT(IZ(I)*3./L(I))
C4=C1*SQRT(IZ(I)*3./L(I))
INDIC=0
IF(ABS(CX).LT.NPEQ)GO TO 230
IF(ABS(CY).LT.NPEQ)GO TO 240
00 217 KKK=1,3
ISINA=-1
00 217 JJ=1,2
ISINA=-ISINA
00 217 KK=1,3
INDIC=INDIC+1
J=NCF*(NOP(I,JJ)-1)+KK
IF(RL(J).EQ.1)GO TO 217
NCO=J-CRL(J)
GO TO (208,209,217,208,209,217,210,211,212,210,211,213,214,215,
217,214,215,216),INDIC
208 S(K)=-C2*ISINA*CX
GO TO 2170
209 S(K)=-C2*ISINA*CY
GO TO 2170
210 S(K)=C3*CY*ISINA
GO TO 2170
211 S(K)=-C3*CX*ISINA
GO TO 2170
212 S(K)=-C3*L(I)*2./3.
GO TO 2170
213 S(K)=-C3*(I)/3.
GO TO 2170
214 S(K)=C4*CY*ISINA
GO TO 2170
215 S(K)=-C4*CX*ISINA
GO TO 2170
216 S(K)=-C4*L(I)
2170 L1(K)=NCO
1VT1(NCO)=1VT1(NCO)+1
I1=(I-1)*3+KKK
IF(L2(I1))218,218,219
218 L2(I1)=K
219 N=K+1
217 CONTINUE
GO TO 250

```

```

230 DO 237 KKK=1,3
    ISINA=-1
    DO 237 JJ=1,2
        ISINA=-ISINA
        DO 237 KK=1,3
            INDI=C=INDIC+1
            J=NOF*(NOP(I,JJ)-1)+KK
            IF(RL(J).EQ.1)GO TO 237
            NCO=J-CHL(J)
            GO TO (237,231,237,237,231,237,232,237,233,232,237,234,235,237,
1237,235,237,236),INDIC
231 S(K)=C2*ISINA*CY
    GO TO 2370
232 S(K)=C3*CY*ISINA
    GO TO 2370
233 S(K)=C3*L(I)+2./3.
    GO TO 2370
234 S(K)=C3*L(I)/3.
    GO TO 2370
235 S(K)=C4*CY*ISINA
    GO TO 2370
236 S(K)=C4*L(I)
2370 L1(A)=NCO
    IVT1(NCO)=IVT1(NCO)+1
    II=(I-1)*3+KKK
    IF(L2(II))238,238,239
238 L2(II)=A
239 K=K+1
237 CONTINUE
    GO TO 250
240 DO 247 KKK=1,3
    ISINA=-1
    DO 247 JJ=1,2
        ISINA=-ISINA
        DO 247 KK=1,3
            INDI=C=INDIC+1
            J=NOF*(NOP(I,JJ)-1)+KK
            IF(RL(J).EQ.1)GO TO 247
            NCO=J-CHL(J)
            GO TO (241,247,247,241,247,247,247,242,243,247,242,244,247,245,247,
1247,245,246),INDIC
241 S(K)=C2*ISINA*CX
    GO TO 2470
242 S(K)=C3*CX*ISINA
    GO TO 2470
243 S(K)=C3*L(I)+2./3.
    GO TO 2470
244 S(K)=C3*L(I)/3.
    GO TO 2470
245 S(K)=C4*CX*ISINA
    GO TO 2470
246 S(K)=C4*L(I)
2470 L1(A)=NCO
    IVT1(NCO)=IVT1(NCO)+1
    II=(I-1)*3+KKK
    IF(L2(II))248,248,249
248 L2(II)=A
249 K=K+1
247 CONTINUE
250 CONTINUE
C.....
C CALCULO DAS AGUES NOJAS EQUIVALENTES
C MONTAGEM DOS VALORES INICIAIS DAS REACOES DE APOIO
C.....
CALL EWLQD(NOP)
DO 1598 J=1,N2
    IF(RL(J).EQ.1)GO TO 3000
    KK=J-CHL(J)
    AC(KK)=A(J)+AE(J)
    GO TO 1598
3000 AR(J)=-(A(J)+AE(J))
1598 CONTINUE
    GO TO 259
C.....
C MONTAGEM ESPECIFICA PARA ELEMENTO FINITO TRIANGULAR CST
C.....
282 K=1
DO 298 I=1,M
    DO 292 IZ=1,N3
        IZER=3*(I-1)+IZER
2820 L2(IZER)=0
        NOA=NOP(I,1)
        NOB=NOP(I,2)
        NOC=NOP(I,3)
        XCB=X(NOA)-X(NOB)
        XAC=X(NOA)-X(NOC)
        XBA=X(NOB)-X(NOA)
        YCA=Y(NOC)-Y(NOA)
        YAB=Y(NOA)-Y(NOB)
        YBC=Y(NOB)-Y(NOC)
        AREA=(X(NOB)*Y(NOC)+Y(NOC)*X(NOA)+X(NOA)*Y(NOB))/2.
        CALL BCST(AREA,E(I),POIS(I),XCB,XAC,XBA,YCA,YAB,YBC,I)
        C1=1.-POIS(I)
        C2=SQRT(C1*(1+POIS(I)))
        C3=SQRT(CES(I)*E(I)/AREA)/(C2*2.)
        C4=C3*POIS(I)
        C5=C3-C2
        C6=SQRT(C1/2.)*C3
        INDI=C=0
        DO 297 KKK=1,3
            DO 297 KK=1,NOF
                DO 297 JJ=1,NON
                    INDI=L=INDIC+1
                    J=NOF*(NOP(I,JJ)-1)+KK
                    IF(RL(J).EQ.1)GO TO 297
                    NCO=J-CHL(J)
                    GO TO (283,284,285,286,287,288,297,297,297,289,290,291,292,293,294,
1,295,296,296),INDIC
283 S(K)=C5*YBC
    GO TO 2962
284 S(K)=C3*YCA
    GO TO 2962
285 S(K)=C3*YAB
    GO TO 2962
286 S(K)=L4*XCB
    GO TO 2962
287 S(K)=L4*XAC
    GO TO 2962
288 S(K)=L4*XBA
    GO TO 2962
289 S(K)=L5*XCB
    GO TO 2962
290 S(K)=C5*XAC
    GO TO 2962
291 S(K)=C5*XBA
    GO TO 2962
292 S(K)=C6*XCB
    GO TO 2962
293 S(K)=C6*XAC
    GO TO 2962

```

```

294 S(K)=C6*XBA
GO TO 2962
295 S(K)=C6*YBC
GO TO 2962
296 S(K)=C6*YCA
GO TO 2962
2961 S(K)=C6*YAd
2962 L1(N)=NCU
IVT1(NCU)=IVT1(NCU)+1
II=(I-1)*3+KAK
IF(L2(II))2963,2963,2964
2963 L2(II)=K
2964 K=K+1
297 CONTINUE
298 CONTINUE
GO TO 299

C.....
C MONTAGEM ESPECIFICA PARA O ELEMENTO FINITO TRIANGULAR LST.
C.....
2980 A=1
DO 3200 I=1,M
DO 2985 IZERA=1,9
IZER=9*(I-1)+IZERA
2985 L2(IZER)=0
NOA=NDP(1,1)
NOB=NDP(1,2)
NOC=NDP(1,3)
XCB=X(NDC)-X(NOB)
XAC=X(NCA)-X(NUC)
XBA=X(NUB)-X(NDG)
YCA=Y(NOC)-Y(NDG)
YAB=Y(NDG)-Y(NOB)
YBC=Y(NOB)-Y(NUC)
AREA=(X(NDC)*YCA+X(NOC)*YAB+X(NOA)*YBC)/2.
BETA(1)=YBC
BETA(2)=YCA
BETA(3)=YAB
DELTA(1)=XCB
DELTA(2)=XAC
DELTA(3)=XBA
WRITE(IG,1)BETA,DELTA,AREA
C1=SQRT((1+ESP(1))/(3+AREA*(1-POIS(1)+POIS(1))))/2.
C2=SQRT((1-POIS(1)+POIS(1)))/2.
C3=SQRT((1-POIS(1))/2.)
DO 2990 J=1,3
H(1,J)=BETA(J)*C1
H(2,J)=0.
H(3,J)=DELTA(J)*C1-C3
JJ=J+3
H(1,JJ)=DELTA(J)*POIS(1)*C1
H(2,JJ)=DELTA(J)*C1-C2
H(3,JJ)=BETA(J)*C1-C3
2990 KKK=3
2992 KKK=KKK+1
IF(KKK-2)2993,2994,2995
2993 CALL FILST(0.5,0.5,0.,FI)
GO TO 2996
2994 CALL FILST(0.,0.5,0.5,FI)
GO TO 2996
2995 CALL FILST(0.5,0.,0.5,FI)
2996 DO 3100 JJ=1,3
DO 3100 KK=1,NDF
DO 3100 JJ=1,NCN
J=NDF*(NDP(1,JJ)-1)+KK
IF(RL(J).EQ.1)GO TO 3100
NCO=J-CRL(J)
COEF=0.
DO 3002 II=1,3
II=II+(KK-1)*3
3002 COEF=(JJ,II)*FI(II,JJ)+COEF
IF(ABS(COEF).LT.NPEQ)GO TO 3100
S(K)=COEF
L1(K)=NCO
IVT1(NCO)=IVT1(NCO)+1
II=(I-1)*9+(KAK-1)*3+JJJ
IF(L2(II))3005,3005,3006
3005 L2(II)=K
3006 K=K+1
3100 CONTINUE
IF(KAK.NE.3)GO TO 2992
CONTINUE
MH=9-M
K=K-1
GO TO 300
299 MH=3-M
K=K-1
300 M1=MH+1
L2(M1)=1+K

C.....
C TRANSFERENCIA PARA A AREA DE SC(ARMAZENANDO POR COLUNAS).
C.....
IF(N.LT.2)GO TO 500
DO 50 J=2,N
IVT1(J)=IVT1(J-1)+IVT1(J)
50 DO 50 I=1,MH
51 IF(L2(II).NE.0)GO TO 512
I=I+1
IF(I-MH)51,51,60
512 IN=L2(II)
I=I+1
513 IF(L2(II).NE.0)GO TO 514
I=I+1
GO TO 513
514 DO 50 IR=IN,L2(II)-1
J=L1(IR)
IVT2(J)=IVT2(J)+1
IF(J-1)53,52,53
52 IPDS=IVT2(J)
GO TO 54
53 IPDS=IVT1(J-1)+IVT2(J)
54 SC(IPDS)=S(IR)
NL1(IPDS)=I
IF(1/C(J))60,55,60
55 IIC(J)=IPDS
60 CONTINUE
J=J+1
IIC(J)=L2(MH+1)
NLTORH
END

```



```

C SUBROUTINE RERE(C,IZ,AX,L)
C *****
C ESTA SUBROTINA CALCULA A MATRIZ DE RIGIDEZ DOS ELEMENTOS DE EIXO
C RETO E SECAO CONSTANTE, UTILIZANDO:
C E = MODULO DE ELASTICIDADE
C IZ = MOMENTO DE INERCIA
C AX = AREA DA SECAO TRANSVERSAL
C L = COMPRIMENTO DO ELEMENTO
C *****
C DIMENSION SM(6,6)
COMMON/A1/SM
REAL IZ,L
SM2Z=(4.*E*IZ)/L
SM3Z=(1.5*SM2Z)/L
SM4Z=(2.*SM3Z)/L
SM1A=(E*AX)/L
SM(1,1)= SM1A
SM(4,4)= SM1A
SM(1,4)=-SM1A
SM(4,1)=-SM1A
SM(2,2)= SM4Z
SM(5,5)= SM4Z
SM(2,5)=-SM4Z
SM(5,2)=-SM4Z
SM(2,3)= SM3Z
SM(3,2)= SM3Z
SM(2,6)= SM3Z
SM(6,2)= SM3Z
SM(3,5)=-SM3Z
SM(5,3)=-SM3Z
SM(5,6)=-SM3Z

SM(6,5)=-SM3Z
SM(3,3)= SM2Z
SM(6,6)= SM2Z
SM(3,6)= SM2Z/2.
SM(6,3)= SM2Z/2.
RETURN
END

```

```

C SUBROUTINE SMRD(I,J1,J2,J3,K1,K2,K3)
C *****
C SUBROTINA PARA O CALCULO DO SMR
C *****
C DIMENSION R(100,3,3),SMR(6,6),SM(6,6)
COMMON/A0/NI,NL,M,N,N2,IG,MCN,NDF,ITE
COMMON/A1/SM,R,SMR
DO1 I=1,6
DO1 J=1,6
1 SMR(I,J)=0
DO2 II=1,3
DO2 J=1,3
DO2 K=1,3
SMR(II,J)=SMR(II,J)+SM(II,K)*R(I,K,J)
SMR(II+3,J)=SMR(II+3,J)+SM(II+3,K)*R(I,K,J)
SMR(II,J+3)=SMR(II,J+3)+SM(II,K+3)*R(I,K,J)
SMR(II+3,J+3)=SMR(II+3,J+3)+SM(II+3,K+3)*R(I,K,J)
2 CONTINUE
C GRAVACAO EM DISCO
WRITE(IG,1)SMR,J1,J2,J3,K1,K2,K3
RETURN
END

```

```

C SUBROUTINE EQLOO(NOP)
C *****
C ESTA SUBROTINA CALCULA O VETOR DE ACOES NODAIS EQUIVALENTES
C *****
C COMMON/A0/NI,NL,M,N,N2,IG,MCN,NDF,ITE
COMMON/A1/SM,9
COMMON/A2/AML
COMMON/A3/LML
COMMON/A4/AE
DIMENSION NOP(M,MCN),LML(170),AE(150),F(100,3,3),AML(109,6),SM(6,6)
1)
DO 1700 I=1,M
IF(LML(I).NE.1)GOTO1700
JJI=NOP(I,1)
JKI=NOP(I,2)
AE(3*JJ1-2)=AE(3*JJ1-2)-R(I,1,1)*AML(I,1)-R(I,2,1)*AML(I,2)-R(I,3,
*1)*AML(I,3)
AE(3*JJ1-1)=AE(3*JJ1-1)-R(I,1,2)*AML(I,1)-R(I,2,2)*AML(I,2)-R(I,3,
*2)*AML(I,3)
AE(3*JJ1)=AE(3*JJ1)-R(I,1,3)*AML(I,1)-R(I,2,3)*AML(I,2)-R(I,3,3)*
*AML(I,3)
AE(3*JKI-2)=AE(3*JKI-2)-R(I,1,1)*AML(I,4)-R(I,2,1)*AML(I,5)-R(I,3,
*1)*AML(I,6)
AE(3*JKI-1)=AE(3*JKI-1)-R(I,1,2)*AML(I,4)-R(I,2,2)*AML(I,5)-R(I,3,
*2)*AML(I,6)
AE(3*JKI)=AE(3*JKI)-R(I,1,3)*AML(I,4)-R(I,2,3)*AML(I,5)-R(I,3,3)*
*AML(I,6)
1700 CONTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE BCST(A,I2,XCB,KAC,XBA,YCA,YAB,YBC,I)
C.....
C  ESTA SUBROTINA CALCULA E GRAVA NO DISCO A MATRIZ B PARA O ELE-
C  MENTO FINITO TRIANGULAR.
C.....
COMMON/AO/NI,NL,M,N,N2,IG,NCN,NDF,ITE
DIMENSION B(3,6)
DO 1 K=1,3
DO 1 J=1,6
1 B(K,J)=0.
C=2*A
B(1,1)=YBC/C
B(1,2)=YCA/C
B(1,3)=YA9/C
B(2,4)=XCB/C
B(2,5)=KAC/C
B(2,6)=XBA/C
B(3,1)=XCB/C
B(3,2)=KAC/C
B(3,3)=XBA/C
B(3,4)=YBC/C
B(3,5)=YCA/C
B(3,6)=YA9/C
WRITE(IG,I)B
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE FILST(LI,LJ,LK,FI)
C.....
C  ESTA ROTINA CALCULA A MATRIZ FI PARA O ELEMENTO FINITO
C  TRIANGULAR LST
C.....
DIMENSION FI(3,6)
REAL LI,LJ,LK
DO 1 I=1,3
DO 1 J=1,6
1 FI(I,J)=0.
FI(1,1)=4*LI-1.
FI(2,2)=4*LJ-1.
FI(3,3)=4*LK-1.
FI(1,4)=4*LJ
FI(2,4)=4*LI
FI(2,5)=4*LK
FI(3,5)=4*LJ
FI(1,6)=4*LK
FI(3,6)=4*LI
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE AEC (MAXH, NOP,RL,CRL)
C.....
C  AEC= ESTA SUBROTINA CALCULA AS ALTURAS EFETIVAS DAS COLUNAS.
C.....
COMMON/AO/NI,NL,M,N,N2,IG,NCN,NDF
DIMENSION MAXH(N),NOP(N,NCN)
INTEGER RL(N2),CRL(N2)
C.....
C  ESTE TRECHO ARMAZENA EM MAXH A LINHA DO PRIMEIRO NAO NULO DE
C  CADA COLUNA.
C  UTILIZA A TECNICA DO ZIENKIEWICZ,"THE FINITE ELEMENT METHOD",PG461
C.....
NMAX=M*N
DO 3501 J=1,N
3501 MAXH(J)=NMAX
DO 3515 I=1,M
DO 3514 JJ=1,NCN
NROWB=(NOP(I,JJ)-1)*NDF
DO 3513 J=1,NDF
NROWB=NROWB+1
IF(CRL(NROWB).EQ.1)GO TO 3513
NROW=NROWB-CRL(NROWB)
DO 3512 KK=1,NCN
NCOLB=(NOP(I,KK)-1)*NDF
DO 3510 K=1,NDF
NCOLB=NCOLB+1
IF(CRL(NCOLB).EQ.1)GO TO 3510
NCOL=NCOLB-CRL(NCOLB)
IF(NCOL.LE.0)GO TO 3510
IF(MAXH(NCOL).LE.NROW)GO TO 3510
MAXH(NCOL)=NROW
3510 CONTINUE
3512 CONTINUE
3513 CONTINUE
3514 CONTINUE
3515 CONTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE TRIESP(F,NPEQ,MAYH,U,IDIAG)
C*****
C ESTA SUBROTINA TRIANGULARIZA A MATRIZ SC ARMAZENADA POR COLUNAS.
C USA-SE PARA ISTO O METODO DA DECOMPOSICAO ORTOGONAL DE GRAM -
C SCHMIDT, TRAEALHANDO-SE COM A TECNICA DE ESPARSIDADE DOS DOIS
C APONTADORES, NLI, PARA OS INDICES DAS LINHAS, IIC PARA INDICAR
C A POSICAO DENTRO DE SC DO INICIO DE CADA COLUNA. AS AREAS SQ,NLIQ
C IICQ, ARMAZENAM A MATRIZ S ORTOGONAL E SEUS RESPECTIVOS APONTADO-
C RES ANALOGOS AOS DE SC. MAYH E IVT1 (VECTORES DE TRABALHO) SAO UTI-
C LIZADOS PARA GUARDAR TEMPORARIAMENTE A PARTE DA COLUNA J DE SO
C A PARTIR DE TRANSFERENCIA DA TRANSFERENCIA J, OU SEJA A PARTIR DO
C APARECIMENTO DE UM NAO NULO EM POSICAO ANTERIORMENTE NULA. A MA-
C TRIZ TRIANGULAR SUPERIOR U E CALCULADA E ARMAZENADA POR COLUNAS
C (ALTURA EFETIVA DE COLUNA). A PRIMEIRA ETAPA DE RESOLUCAO DO
C SISTEMA E SUBSTITUICAO PARA A FRENTE E TAMBEM EXECUTADA A MEDIDA
C EN QUE SE CALCULAM OS COEFICIENTES DA MATRIZ ASSIM, O VETOR DE CAR-
C GAS NDAIS E E MODIFICADO SIMULTANEAMENTE. A SEGUNDA ETAPA (RETRO-
C SUBSTITUICAO) FORNECE OS DESLOCAMENTOS NOVAIS NA AREA F.
C*****
COMMON/AC/NI,NL,MN,NZ,IG,NCN,NDF,ITE
COMMON/AS/SQ(15000),NLIQ(15000),IICQ(300),SC(15000),NLI(15000),
1 IIC(300)
DIMENSION F(N),MAYH(N),IDIAG(N),U(7500),IVT1(300)
REAL MAYH(300),NPEQ
C*****
C INICIALIZACAO DO CALCULO DE U TAL QUE SC=SQ*U.
C TRANSFERENCIAS DOS VECTORES IIC,SC,NLI PARA AS AREAS DE TRABALHO
C IICQ,SC,NLIQ
C SOMA=SQ*ALIC
C MODIFICACAO DO VETOR DE CARREGAMENTOS
C IANN=CONTADOR DO APARECIMENTO DE NAO NULOS.
C IU=FORNECE A POSICAO DE ARMAZENAMENTO DENTRO DO VETOR U.
C*****
M=MM
IF(ITE.GE.3)M=3*MM
IF(ITE.GE.6)M=9*MM
SOMA=C.
INDESP=1
IANN=0
IP=0
IU=1
J=1
DO 5 N=1,N+1
5 IICQ(N)=IIC(N)
10 NK=IICQ(J)
C*****
C ESP=INDICE DE ESPARSIDADE, OU SEJA, PORCENTAGEM DE NAO NULOS EM S.
C ESP E CALCULADO EM CADA PASSO DA TRIANGULARIZACAO.
C*****
IF(J.EE.INDESP)GO TO 13
INDESP=INDESP+5
ESP=(FLOAT(IIC(N+1)-1+IANN))/M/M*100
WRITE(NI,12)J,ESP
12 FORMAT(/,'10X','J=',I3,'10X','INDICE DE NAO NULOS=',F9.2)
13 IN=IIC(J)
IFIM=IIC(J+1)-1
DO 15 N=IN,IFIM
SQ(NK)=SC(NK)
NLIQ(NK)=NLI(NK)
15 NK=NK+1
IF(1.EE.JJGO TO 52
C*****
C CALCULO DO COEFICIENTE DA DIAGONAL DA MATRIZ U NA COLUNA J.
C CALCULO DA COLUNA J DA MATRIZ ORTOGONAL SQ.
C AVALIACAO DA CARGA MODIFICADA NA DIRECAO J.
C IDIAG ARMAZENA A POSICAO DO COEFICIENTE DA DIAGONAL DENTRO DE U.
C*****
26 XI=0
IDIAG(J)=IU
IN=IICQ(J)
IFIM=IICQ(J+1)-1
DO 30 JJ=IN,IFIM
X1=X1+SQ(JJ)*SQ(JJ)
30 XI=X1+SQ(JJ)*SQ(JJ)
U(IU)=SQRT(X1)
F(J)=(F(J)-SOMA)/U(IU)
DO 33 JJ=IN,IFIM
33 SQ(JJ)=SQ(JJ)/U(IU)
IF(J.EQ.N)GO TO 100
J=J+1
JI=J+1
IICQ(JI)=IIC(JI)+IANN
IU=IU+1
IP=IP+1
SOMA=0.
I=MAYH(J)
GO TO 10
C*****
C CALCULO DE U(I,J)=COLUNA I DE SQ*COLUNA J DE SO.
C*****
52 SOMA=0.
II=IICQ(I)
JJ=IICQ(J)
55 IF(NLIQ(II)-NLIQ(JJ))60,65,70
60 II=II+1
IF(IICQ(II+1)-II)73,73,55
65 SOMA=SOMA+SQ(JJ)*SQ(II)
II=II+1
IF(IICQ(II+1)-II)73,73,70
70 JJ=JJ+1
IF(IICQ(JJ+1)-JJ)73,73,55
73 U(IU)=SOMA
IF(AOS(SCM),LT,NPEQ)GO TO 98
SOMA=SOMA+SCM*F(I)
IP=IP+1
C*****
C MODIFICACAO DA COLUNA J EM SQ: SQ(COL-J)=SQ(COL-J)-U(I,J)*SQ(COL-
C J). CASO APARECA UM NAO NULO EM POSICAO ANTERIORMENTE NULA O
C ARMAZENAMENTO DA COLUNA MODIFICADA PASSA A SER FEITO EM MATRA E
C IVT1. NA PRIMEIRA ARMAZENAM-SE O COEFICIENTE L NO SEGUNDO ARMAZENAM-
C SE A LINHA DESTE COEFICIENTE NA MATRIZ SQ
C*****
II=IICQ(I)
JJ=IICQ(J)
K=-1
75 K=K+1
IF(NLIQ(II)-NLIQ(JJ))78,76,77
76 SQ(JJ)=SQ(JJ)-SOMA*SQ(II)
JJ=JJ+1
IF(IICQ(JJ+1)-JJ)GO TO 772
760 II=II+1
IF(IICQ(II+1)-II)98,98,75
77 JJ=JJ+1
IF(IICQ(JJ+1)-JJ)GO TO 75
771 TERMO=-SCM*SQ(II)
IF(AOS(ITERM),LT,NPEQ)GO TO 772
SQ(JJ)=TERMO

```

```

      NLIC(JJ)=NLIC(II)
      IANN=IANN+1
      JJ=JJ+1
772  II=II+1
      IF(IICG(I+1).GT.II)GO TO 771
      JI=JI+1
      IICG(JI)=IIC(JI)+IANN
      GO TO 76
78  TERMO=-SCMA+SQ(II)
      IF(ABS(TERMO)-NPEQ)781,781,783
781  K=K+1
      GO TO 760
783  ITRANS=IICG(JI)+K
      K=1
      GO TO 790
79  TERMO=-SCMA+SQ(II)
      IF(ABS(TERMO)-NPEQ)7900,7900,790
7900 K=K+1
      GO TO 791
790  MATRA(K)=TERMO
      IVT1(K)=NLIC(II)
      IANN=IANN+1
791  II=II+1
      IF(IICG(I+1).LE.II)GO TO 950
80  K=K+1
      IF(NLIC(II)-NLIC(JJ))79,81,82
81  MATRA(K)=SQ(JJ)-SCMA+SQ(II)
      IVT1(K)=NLIC(II)
      JJ=JJ+1
      IF(IICG(JI+1).GT.JJ)GO TO 791
810  II=II+1
      IF(IICG(I+1)-II)95,95,811
811  TERMO=-SCMA+SQ(II)
      IF(ABS(TERMO).LT.NPEQ)GO TO 810
      K=K+1
      MATRA(K)=TERMO
      IVT1(K)=NLIC(II)
      IANN=IANN+1
      GO TO 810
82  MATRA(K)=SQ(JJ)
      IVT1(K)=NLIC(JJ)
      JJ=JJ+1
      IF(IICG(JI+1)-JJ)811,811,80
950  K=K+1
      MATRA(K)=SQ(JJ)
      IVT1(K)=NLIC(JJ)
      JJ=JJ+1
      IF(IICG(JI+1)-JJ)95,95,950
95  JI=JI+1
      IICG(JI)=IIC(JI)+IANN
      KK=0
      DO 96 K=ITRANS,IICG(JI)-1
      KK=KK+1
      SQ(K)=MATRA(KK)
96  NLIC(N)=IVT1(KK)
98  JI=JI+1
      IU=IU+1
      IF(I-J)52,26,52
C*****
C  PUAT=PORCENTAGEM DE COEFICIENTES DE U ARMAZENADOS EM RELACAO AD
C  QUE SERIA O U TOTAL(QUADRA:NA=N*N)-
C  IPNNU=PORCENTAGEM DE COEFICIENTES NAO NULOS EM U ARMAZENADA.
C*****
100  PUAT=(FLOAT(IDIAG(N)))/N/N*100
      IPNNU=(FLOAT(IP))/IDIAG(N)*100
      WRITE(NI,101)PUAT,IPNNU
101  FORMAT(//,1X,'PORCENTAGEM DOS COEFICIENTES DE U ARMAZENADOS=',F5.
      2,/,1X,'PORCENTAGEM DE NAO NULOS DOS COEFICIENTES DE U ARMAZENADO
      25=',F5.2,/,/)
C*****
C  CALCULO DOS DESLOCAMENTOS NODAIS DA ESTRUTURA .
C  RETROSUBSTITUICAO. OS DESLOCAMENTOS NODAIS SAO ARMAZENADOS EM F.
C*****
DO 49 IC=1,N
      SOMA=0
      I=N-IC+1
      ID=IDIAG(I)
      IF(I.EQ.N)GO TO 49
      DO 48 J=I+1,N
      IF((J-1-IDIAG(J)+IDIAG(J-1)).GT.I)GO TO 48
      IPO=I-J+IDIAG(J)
      SOMA=SOMA+UC(IPO)*F(J)
48  CONTINUE
49  F(I)=(F(I)-SOMA)/U(ID)
      RETURN
      END

```

```

      SUBROUTINE MONTAGE,AX,IZ,CRL,X,Y,Z,NDF,NJ,IND,ITIP,NPEQ,NA,LF,RL,
      IAC,A,AR,AR)
C*****
C  ESTA SUBROTINA MONTA A MATRIZ DE RIGIDEZ FATORADA.
C  S-FATOR DA MATRIZ DE REGIOE 2 GLOBAL,RETANGULAR, CONTENDO APENAS OS
C  COEFICIENTES REFERENCIAIS AS DIRECOES LIVRES, ARMAZENADA POR COLUNAS
C  DE FORMA UNIDIMENSIONAL. SE A MATRIZ S NAO TIVER A FORMA DE BANDA
C  VARIAR PREVISIVEL, ELA SERA MONTADA COM TODOS OS COEFICIENTES DA
C  FORMA RETANGULAR, POR COLUNAS.
C  A COLUNA Z CONTEM O CONTEUDO AS DISTANCIAS NOS EIXOS X,Y,Z ENTRE
C  AS EXISTENCIAS DOS ELEMENTOS E O VETOR CONTEUDO O COMPRIMENTO DOS
C  ELEMENTOS.
C*****
COMMON/AG/NI,NL,M,N,N2,IC,NCN,NDF,ITE
COMMON/A1/SM,R,SHR
COMMON/A2/APL
COMMON/A3/LPL
COMMON/A4/AE
COMMON/A5/SC(15000)
DIMENSION NCP(4,NCN),ECN(),XCN(),YCN(),ZCN(),LML(100),IND(N),
      LSH(6,6),XCL(100),YCL(100),ZCL(100),F(100,3,3),SHR(6,6),AE(150),
      INTEGEF(AC(2),AC(2),AC(2),AR,NR)
      REAL L1,ICL,NPEQ,IZ(2,N)
C*****
C  NEN-NUMERO DE ELEMENTOS NA COLUNA, PARA A MATRIZ S E P BANDA VARIA-
C  VEL-ARMAZENADA POR COLUNAS.
C  IND-VETOR QUE ARMAZENA O NOME DO ELEMENTO NA DIRECAO J.
C  CALCULO DE FATORACAO DE FAIXA E MA MAIOR AFASTAMENTO ENTRE ELE-
C  MENTOS QUE CONTRIBUIM PARA UMA MESMA DIRECAO LIVRE.
C*****
      IF(ILE.EG.3)GO TO 200

```

```

C*****
C*****MONTAGEM ESPECIFICA PARA PLACA ESPACIAL E PLANA.
C*****
      IF(ITIP.E.1)GO TO 10
      DO 3 J=1,N
103  IND(J)=0
      MA=1
      LF=1
      DO 8 I=1,M
      DO 8 JJ=1,NCN
      IF(JJ.GF.ACN)GO TO 5
      DO4  JJJ=JJ+1,NCN
      LFE=NDF*(NOP(I,JJJ)-NOP(I,JJ)+1)
      IF(LFE.LE.LF)GC TO 4
      LF=LFE
4  CONTINUE
5  DO 6 KK=1,NCF
      J=NDF*(NCP(I,JJ)-1)+KK
      IF(RL(J).EQ.1)GO TO 8
      J=J-RL(J)
      IF(INO(J))7,6,7
6  IND(J)=I
      GO TO 8
7  MAA=1-IND(J)+1
      IF(MA.GF.MAA)GO TO 8
      MA=MAA
8  CONTINUE
9  FORMAT(/,20X,'MA=',I4//,20X,'LF=',I4)
      IF(LF.A.102,10,100
100  WRITE(NT,101)
101  FORMAT(/,20X,'ERRO NO CALCULO DE LF')
10  ITIP=1
      WRITE(NT,11)
11  FORMAT(/,20X,'A RESOLUCAO E FEITA SEM UTILIZAR AS CARACTERISTICAS
      DE BANDA')
      IND(N)=M*N
      GO TO 108
102  IF(2*LF.A.103,10,10)
C*****
C*****CALCULO DO VETOR IND,INDICADOR DAS POSICOES DOS ULTIMOS ELEMENTOS
C*****NAD NUCLOS DE CADA COLUNA.
C*****
103  IND(1)=MA
      J=2
104  IF(J.GT.LF)GC TO 105
      NEC=((N-1)-(J-1))/(N-1)+MA+1
      GO TO 107
105  IF(J.LE.(N-LF))GO TO 106
      NEC=M+LF-J
      GO TO 107
106  NEC=((N-A)*(J-1))/(N-1)+MA+LF
107  IF(NEC.GT.N)GO TO 10
      INO(J)=IND(J-1)+NEC
      J=J+1
      IF(J.LE.N)GO TO 104
108  ISINA=-1
      DO 12 I=1,IND(N)
12  S(I)=0.
      DO 20 I=1,P
      JJ1=NOP(I,1)
      JK1=NOP(I,2)
      XCL(I)=X(JK1)-X(JJ1)
      YCL(I)=Y(JK1)-Y(JJ1)
      ZCL(I)=Z(JK1)-Z(JJ1)
      L(I)=SCF(XCL(I)+XCL(I)+YCL(I)+YCL(I)+ZCL(I)+ZCL(I))
      WRITE(IG,1)XCL(I),YCL(I),ZCL(I),L(I)
      CX=XCL(I)/L(I)
      CY=YCL(I)/L(I)
      CZ=ZCL(I)/L(I)
      CONST=SQRT(E(I)*AX(I)/L(I))
      DO 17 JJ=1,ACN
      ISINA=-ISINA
      C=CX
      DO 116 KK=1,NDF
      IF(ABS(C).LT.NPEQ)GO TO 13
      J=NDF*(NCP(I,JJ)-1)+KK
      IF(RL(J).NE.1)GO TO 15
      IF(NDF-KK-1)116,140,135
13  C=CY
135  GO TO 116
140  C=CZ
      IF(ITE.EG.1)C=CY
      GO TO 116
15  NCO=J-RL(J)
      IF(ITIP.NE.1)GO TO 109
      IPOS=(NCO-1)*M+I
      GO TO 16
109  IF(NCO.LE.LF)GO TO 110
      IPOS=IND(NCO-1)+1-NCO+LF
      GO TO 16
110  IF(NCO.NE.1)GC TO 111
      IPOS=1
      GO TO 16
111  IPOS=IND(NCO-1)+1
16  S(IPOS)=C*CONST*ISINA
      GO TO 13
116  CONTINUE
17  CONTINUE
20  CONTINUE
      GO TO 300
C*****
C*****MONTAGEM ESPECIFICA PARA PONTICO PLANO
C*****
200  ITIP=1
      DO 205 I=1,M*N+NCF
205  S(I)=0.
      DO 250 I=1,M
      JJ1=NOP(I,1)
      JK1=NOP(I,2)
      XCL(I)=X(JK1)-X(JJ1)
      YCL(I)=Y(JK1)-Y(JJ1)
      L(I)=SCF(XCL(I)+XCL(I)+YCL(I)+YCL(I))
      CX=XCL(I)/L(I)
      CY=YCL(I)/L(I)
      R(I,1,1)=CX
      R(I,1,2)=CY
      R(I,1,3)=0.
      R(I,2,1)=CY
      R(I,2,2)=-CX
      R(I,2,3)=0.
      R(I,3,1)=0.
      R(I,3,2)=0.
      R(I,3,3)=-1.
      JJ=3+JJ1-2
      JJ=3+JJ1-1
      JJ=3+JJ1
      KK=3+JK1-2
      KK=3+JK1-1
      KK=3+JK1

```

```

C *** CALCULO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO
CALL HERE(L(I),I2(I),AX(I),L(I))
C *** CHAMADA DA SUBROTINA CALCULADORA DE SMR
CALL SPRM(I,J1,J2,J3,K1,K2,K3)
C1=SQRT((I1)/L(I))
C2=C1*SQRT(AX(I))
C3=C1*SQRT(I2(I))*3./L(I)
C4=C1*SQRT(I2(I))*3./L(I)
INDIC=0
ISINA=1
DO 217 J=1,2
ISINA=-ISINA
DO 217 K=1,3
INDIC=INDIC+1
J=NDF*(NCP(I,JJ)-1)+KK
IF(RL(J).EQ.1)GO TO 217
NCO=J-CRL(J)
IPOS=(NCO-1)*M+I-1+NDF+1
GO TO (208,209,210,208,209,211),INDIC
208 S(IPOS)=-C2*CX*ISINA
IPOS=IPOS+1
S(IPOS)=C1*CY*ISINA
IPOS=IPOS+1
S(IPOS)=C4*CY*ISINA
GO TO 217
209 S(IPOS)=-C2*CY*ISINA
IPOS=IPOS+1
S(IPOS)=-C3*CX*ISINA
IPOS=IPOS+1
S(IPOS)=-C4*CX*ISINA
GO TO 217
210 IPOS=IPOS+1
S(IPOS)=-C3*L(I)*2./3.
GO TO 217
211 IPOS=IPOS+1
S(IPOS)=-C3*L(I)/3.
IPOS=IPOS+1
S(IPOS)=-C4*L(I)
217 CONTINUE
250 CONTINUE
C ***
C *** CALCULO DAS ACOES NODAIS EQUIVALENTES E
C *** MONTAGEM DOS VALORES INICIAIS DAS REACOES DE APOIO
C ***
CALL ECLCO(NCP)
DO 1598 J=1,2
IF(RL(J).EQ.1)GO TO 3000
K=J-CRL(J)
AC(K)=A(J)+AE(J)
GO TO 1598
3000 AR(J)=-(AC(J)+AE(J))
1598 CONTINUE
300 RETURNA
END

SUBROUTINE CONDIC
COMMON/AG/N1,NL,MM,N,N2,IG,NCN,NDF,ITE
COMMON/AS/SS(15000)
DIMENSION SC(15000),V(15000),DX(300),DY(300),DZ(300),XCL(15000),DV(300)
C ***
C *** ESTA ROTINA CALCULA O NUMERO DE CONDICIONAMENTO DA MATRIZ DE RIGI-
C *** DEZ DA ESTRUTURA. O FATOR S TERA QUE SER MONTADO DE FORMA COMPLETA
C *** -S- CONTEM A MATRIZ DE RIGIDEZ INVERTIDA DX,DY,DZ-VECTORES DE TRAB.
C *** -V-CONTEM A MATRIZ DE RIGIDEZ E-Q-CONTEM S TRANSPOSTA
C ***
M=MM
IF(ITE.GE.3)M=3*MM
IF(ITE.GE.6)M=9*MM
C ***
C *** TRANSFERENCIA DO FATOR SS PARA A ARCA DE TRABALHO S,ARMAZENAMENTO
C *** EM Q DA MATRIZ S TRANSPOSTA E OBTENCAO DA MATRIZ DE RIGIDEZ EM V.
C ***
DO 1 I=1,M
DO 1 J=1,M
IPOS=(I-1)*N+J
1 S(IPOS)=SS(IPOS)
DO 5 I=1,M
DO 5 J=1,M
IPOS=(I-1)*N+J
5 Q(IPOS)=S((J-1)*N+I)
CALL PRODUT(V,S,Q,N,M,N,N)
C ***
C *** SCALING E CALCULO DA NORMA HOLDER=1 DA MATRIZ DE RIGIDEZ
C *** DV E A MATRIZ DIAGONAL PARA SE FAZER O SCALING DE V PARA EVITAR
C *** O MAL CONDICIONAMENTO ARTIFICIAL.
C ***
SUMV=C
DO 10 I=1,N
IPOS=(I-1)*N+I
10 DV(I)=1./SQRT(V(IPOS))
DO 12 I=1,N
SOMAV=C
DO 11 J=1,N
IPOS=(J-1)*N+I
V(IPOS)=V(IPOS)*DV(I)*DV(J)
S(IPOS)=V(IPOS)
11 SOMAV=SOMAV+ABS(V(IPOS))
IF(SUMV.GE.SOMAV)GO TO 12
SUMV=SOMAV
12 CONTINUE
C ***
C *** INVERSAO DA MATRIZ DE RIGIDEZ E CALCULO DA NORMA HOLDER=1 DA INVER-
C *** SA
C ***
CALL INVERCA(S,DX,DY,1,N,27,N1)
CALL PRODUT(XCL,S,V,N,N,N,N)
SUMS=C
DO 20 I=1,N
SOMAS=C
DO 15 J=1,N
IPOS=(J-1)*N+I
15 SOMAS=SOMAS+ABS(S(IPOS))
IF(SUMS.GE.SOMAS)GO TO 20
SUMS=SOMAS
20 CONTINUE
C ***
C *** CALCULO E IMPRESSAO DO NUMERO DE CONDICIONAMENTO.
C ***
COND=SUMS*S*PV
WRITE(N1,25) SUMV,SUMS,COND
25 FORMAT(//,CX, 'NORMA DA MATRIZ DE RI
1610Z=//,12,6,/,20X,'NORMA DA INVERSA',E12,6,/,20X,'NUMERO DE CON
2010NAMENTO DA MATRIZ DE RIGIDEZ ',E12,6,/,1X,120C(//)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE PRODUZ(G,C,B,M,N,IP,IECON)
C*****
C  ESTA ROTINA CALCULA O PRODUTO DE DUAS MATRIZES
C*****
DIMENSION B(M,N),C(N,IP),G(ILCON,IP)
IF(IECON.NE.1) GO TO 451
IF(M.EC.1) GO TO 451
DO 450 I=1,M
DO 440 J=1,IP
G(I,J)=0.
DO 440 K=1,N
440 G(I,J)=G(I,J)+B(I,K)*C(K,J)
DO 450 J=1,N
450 B(I,J)=G(I,J)
GO TO 460
451 DO 455 I=1,M
DO 455 J=1,IP
G(I,J)=0.
DO 455 K=1,N
455 G(I,J)=G(I,J)+B(I,K)*C(K,J)
460 RETURN
END

```

```

SUBROUTINE INVER(N,A,G,M,N1,N2,V,N1)
C*****
C  ESTA ROTINA CALCULA A INVERSA DE UMA MATRIZ
C*****
DIMENSION A(N,N),G(N),H(N),V(N)
C  CRIA O VETOR QUE INDICA AS TROCAS ENTRE LINHAS
DO 2 I=1,N
2 V(I)=1
C  VERIFICA SE O A11 E ZERO
IF(A(N1,N1).NE.0.) GO TO 10
N11=N1
3 N11=N11+1
IF(N11.LE.N2) GO TO 6
31 WRITE(N1,4)
4 FORMAT(//,2X,'A SUBMATRIZ N*O E INVERSIVEL')
GO TO 100
6 IF (A(N11,N1).EQ.0.) GO TO 3
DO 7 J=N1,N2
ATEMP=A(N1,J)
A(N1,J)=A(N11,J)
7 A(N11,J)=ATEMP
C  TROCA POSICOES AC VETOR INDICADOR
AVT=V(N1)
V(N1)=V(N11)
V(N11)=AVT
C  CALCULA OS COEFICIENTES DAS MATRIZES INVERSAS PELO METODO DA PARTICAO
10 A(N1,N1)=1./A(N1,N1)
DO 34 P=N1,N2-1
K=M+1
DO 12 I=N1,M
G(I)=0.
DO 12 J=N1,M
12 G(I)=G(I)+A(I,J)*A(J,K)
K1=K
DO 14 J=N1,M
H(J)=0.
DO 14 I=N1,M
14 H(J)=H(J)+A(K,I)*A(I,J)
D=0.
DO 16 I=N1,M
D=D+A(K,I)*G(I)
E=A(K,K)-D
C  TESTA SE 'E' VALE ZERO
IF(E.NE.0.) GO TO 30
K1=K1+1
IF(K1.GT.N2) GO TO 31
DO 17 J=N1,N2
ATEMP=A(K,J)
A(K,J)=A(K1,J)
17 A(K1,J)=ATEMP
C  TROCA POSICOES NO VETOR INDICADOR
AVT=V(K)
V(K)=V(K1)
V(K1)=AVT
GO TO 13
C  CALCULA A MATRIZ INVERSA
30 A(K,K)=1./E
DO 33 I=N1,M
A(I,K)=-G(I)+A(K,K)
33 A(K,I)=-A(K,K)*H(I)
DO 34 I=N1,M
DO 34 J=N1,M
34 A(I,J)=A(I,J)-G(I)*A(K,J)
C  REGREENA O VETOR V, E COM ELE , A MATRIZ INVERSA
50 DO 60 II=N1,N2-1
KONT=0
IF(V(II).EQ.1) GO TO 60
KONT=1
IS=II+1
DO 59 I=N1,N2
ATEMP=A(I,IS)
A(I,IS)=A(I,II)
59 A(I,II)=ATEMP
AVT=V(IS)
V(IS)=V(II)
V(II)=AVT
60 CONTINUE
IF(KONT.NE.0) GO TO 50
100 RETURN
END

```

```

C***** SUBROUTINE TRIANG(F,IND,ITIP,V,NA,LF)*****
C      ESTA SUBROTINA TRIANGULARIZA A MATRIZ S PLO METODO DE HOUSEHOLDER
C      PODENDO SER UTILIZADOS DOIS CAMINHOS DIFERENTES: SE A MATRIZ TIVER
C      AS CARACTERISTICAS DE BANDA NAO SIMETRICA ESTUDADA, SERA UTILIZADA
C      ESTA CARACTERISTICA. CASO CONTRARIO, TODOS OS COEFICIENTES DA MA-
C      TRIZ RETANGULAR SERAO LEVADOS EM CONTA.
C*****
COMMON/AD/N1,NL,MM,N,N2,IG,NCN,NUF,ITE
COMMON/AS/5(15000)
DIMENSION IAD(N),F(N),V(N)
N=MM
IF(ITE.EQ.3)M=3*MM
IF(N.EC.N)GO TO 5
N1=N
GO TO 6
5 N1=N-1
6 DO 100 K=1,N1
C*****
C      CALCULO DE W1 E TETA
C*****
X1=0.
IF(ITIP.EQ.1)GO TO 10
NACR=AUMERO DE ACRESCEIMOS
IF(K.GT.LF)GO TO 8
IF(K.LE.LF)GO TO 7
INI=1
NACR=N1
GO TO 9
7 NACR=IND(K)-IND(K-1)-K+1
INI=IND(N-1)+K
GO TO 9
8 NACR=IND(K)-IND(K-1)-LF+1
INI=IND(N-1)+LF
9 IFM=IND(K)
GO TO 11
C      CASO EM QUE A MATRIZ NAO TEM AS CARACTERISTICAS DE BANDA ESPECIAIS
10 INI=(K-1)*M+K
IFIN=K+1
11 DO 12 IPCS=INI,IFIM
12 X1=X1+S(IPCS)*S(IPCS)
XNK=SGRT(X1)
VARIA=ABS(S(INI))-XNK-XNK-ABS(S(INI))
IF(VARIA.LT.0.)GO TO 13
W1=S(INI)-XNK
GO TO 14
13 W1=S(INI)+XNK
14 TETA=2./(X1+W1-W1-S(INI)*S(INI))
SOMA=C.
IF(ITIP.NE.1)GO TO 20
C*****
C      TRIANGULARIZACAO SEM UTILIZACAO DA CARACTERISTICA DE BANDA.
C*****
DO 15 J=K,N
V(J)=W1*S((J-1)*M+K)
DO 15 I=K+1,M
15 V(J)=V(J)+S((K-1)*M+I)*S((J-1)*M+I)
DO 16 J=K,N
IPCS=(J-1)*M+K
16 S(IPCS)=S(IPCS)-TETA*V(J)*W1
DO 17 I=K+1,M
DO 17 I=K+1,M
IPCS=(J-1)*M+I
17 S(IPCS)=S(IPCS)-TETA*V(J)*S((K-1)*M+I)
IF(K.EC.LF)GO TO 19
DO 18 I=1,K-1
18 SOMA=SOMA+S((K-1)*M+I)*F(I)
19 F(K)=(F(K)-SOMA)/S((K-1)*M+K)
GO TO 100
C*****
C      CALCULO DO VETOR V UTILIZANDO AS CARACTERISTICAS DE BANDA.
C*****
20 INICW=INI
KLF=K+LF
KNAC=N+NACR+LF-2
IF(K.NE.1)GO TO 21
J=1
V(1)=C.
GO TO 23
21 J=K-1
22 J=J+1
IF(J.GT.N)GO TO 26
V(J)=C.
IF(J.GE.LF)GO TO 225
IP=IND(J-1)+K
GO TO 23
225 IF(J.GE.KLF)GO TO 24
IP=IND(J-1)+KLF-J
23 V(J)=V(J)+W1*S(IP)
IP=IP+1
IPCS=INI+1
GO TO 25
24 IF(J.GT.KNAC)GO TO 26
IP=IND(J-1)+1
INICW=INICW+1
IPCS=INICW
25 DO 25C IPO=IPCS,IND(K)
V(J)=V(J)+S(IPO)*S(IP)
IP=IP+1
GO TO 22
C*****
C      MODIFICACAO DA MATRIZ S E DO VETOR F DE CARGAS.
C*****
26 INICW=INI
S(INI)=S(INI)-TETA*W1*V(K)
J=K
27 J=J+1
IF(J.GT.N)GO TO 30
IF(J.GE.LF)GO TO 275
IP=IND(J-1)+K
GO TO 277
275 IF(J.GE.KLF)GO TO 28
IP=IND(J-1)+KLF-J
276 S(IP)=S(IP)-TETA*W1*V(J)
IP=IP+1
IPCS=INI+1
GO TO 29
28 IF(J.GT.KNAC)GO TO 30
IP=IND(J-1)+1
INICW=INICW+1
IPCS=INICW
29 DO 29C IPO=IPCS,IND(K)
S(IP)=S(IP)-TETA*S(IPG)*V(J)
290 IP=IP+1
GO TO 27
30 IF(K.NE.LF)GO TO 33
IF(K.NE.1)GO TO 31
F(1)=F(1)/S(1)
GO TO 170

```



```

31 DO 32 I=1,N-1
32 SOMA=SOMA+S(INO(K-1)+I)*F(I)
F(K)=F(K)-SCMA)/S(INO(K-1)+K)
GO TO 100
33 DO 34 I=1,LF-1
34 SOMA=SOMA+S(INO(K-1)+I)*F(K-LF+1)
F(K)=(F(K)-SCMA)/S(INO(K-1)+LF)
100 CONTINUE
IF(CH.AE.A)GO TO 200
SOMA=0
IF(IT.FE.1)GO TO 190
DO 180 I=1,N-1
180 SOMA=SOMA+S((N-1)+M+I)*F(I)
F(N)=(F(N)-SCMA)/S(N*N)
GO TO 200
190 DO 195 I=1,LF-1
195 SOMA=SOMA+S(INO(N-1)+I)*F(N-LF+1)
F(N)=(F(N)-SCMA)/S(INO(N-1)+LF)
200 IF(IT.FE.NF.1)GO TO 900
C*****
C SEGUNDA PARTE Y=S*X. RETROSUBSTITUICAO. ARMAZENAMOS OS DESLOCA-
C MENTOS NO VARIÁVEL EM F.
C*****
F(N)=F(N)/S((N-1)+M*N)
IF(N.EC.1)GO TO 49
DO 400 IC=2,N
SOMA=0
J=N-IC+1
DO 700 J=I+1,N
700 SOMA=SOMA+S((J-1)+M+I)*F(J)
800 F(I)=(F(I)-SCMA)/S((I-1)+M+I)
GO TO 49
900 F(N)=F(N)/S(INO(N-1)+LF)
IF IM=A
NLF1=N-LF+1
LF1=-1+LF
IC=2
914 SOMA=0
J=N-IC+1
IF(1.EC.ALF1)GO TO 915
IF IM=1+LF1
915 LF1=LF+1
DO 930 J=I+1,IFIM
IF(J.LE.LF)GO TO 920
IPDS=INO(J-1)-J+LF1
GO TO 930
920 IF(J.EC.1)GO TO 925
IPDS=INO(J-1)+I
GO TO 930
925 IPDS=1
930 SOMA=SOMA+S(IPDS)*F(J)
IC=IC+1
IF(IC.GT.N)GO TO 40
IF(1.LE.LF)GO TO 140
SII=S(INO(I-1)+LF)
GO TO 38
140 SII=S(INO(I-1)+I)
38 F(I)=(F(I)-SCMA)/SII
GO TO 914
40 F(I)=(F(I)-SCMA)/S(I)
49, RETORNA
END

```

```

C*****
C SUBROUTINE RESOL(Q,NJ,AR,V1,NR,RL,CRL,NOP,F,AX,POIS,ESP)
C*****
C ESTA SUBROTINA ENCONTRA OS ESFORÇOS NOS ELEMENTOS.
C*****
COMMON/AC/NJ,NL,M,N,N2,IG,NCN,NDF,ITE
COMMON/A1/SM,R,SMR
COMMON/A2/AML,DJ
DIMENSION Q(N2),NOP(M,NCN),E(M),AX(M), V1(M),XCL(100),YCL(100),
1ZCL(100),SP(6,6),R(100,3,3),AML(100,6),DJ(300),AR(NR),POIS(M),ESP(
2M)
INTEGER RL(N2),CRL(N2)
REAL L(100),LD
C*****
C IMPRESSAO DOS DESLOCAMENTOS- Q=VECTOR DE DESLOCAMENTOS NUDAIS
C*****
WRITE(NI,50)
50 FORMAT(//,20X,'DESLOCAMENTOS NUDAIS',//,21X,'N0',11X,'D1',17X,'D2',
1,17X,'D3',//)
J=N+1
JZZ=N2+1
DO 1599 JZ=1,N2
JE=JZZ-JZ
IF(RL(JE).EQ.0)GO TO 703
DJ(JE)=0
GO TO 1599
703 J=J-1
DJ(JE)=0(J)
1599 CONTINUE
DO 56 J=1,NJ
KK=1
51 IF(PL(NDF+J+1-KK).EQ.0)GO TO 52
KK=KK+1
IF(KK-NDF)51,51,56
52 WRITE(NI,55)J,DJ(NDF+(J-1)+KK),KK=1,NCF)
55 FORMAT(20X,13,3(X,E14.8))
56 CONTINUE
GO TO(570,570,670,680,680,690,690),ITE
C*****
C CALCULO DAS FORÇAS EM CADA BARRA DE TRELICA
C*****
570 WRITE(NI,58)
58 FORMAT(//,23X,'BARRA',14X,'FORÇA',20X,'TENSÃO',//)
DO 60 I=1
READ(IG,1)XCL(I),YCL(I),ZCL(I),L(I)
JJ1=NCF(I-1)
JK1=NOP(I-2)
IF(ITE.JG.1)GO TO 580
DELTX=DJ(JK1+2)-DJ(JJ1+3-2)
DELT Y=DJ(JK1+1)-DJ(JJ1+1-1)
DELT Z=DJ(JK1+NCF)-DJ(JJ1+NCF)
GO TO 585
580 DELTX=DJ(JK1+NDF-1)-DJ(JJ1+NDF-1)
DELT Y=DJ(JK1+NCF)-DJ(JJ1+NCF)
DELT Z=0
585 V(I)=L(I)*(DELTX*XCL(I)+DELT Y*YCL(I)+DELT Z*ZCL(I))/(L(I)*L(I))
W(I)=V(I)*AX(I)

```

```

C*****
C IMPRESSAO DAS FORÇAS E TENSOES
C*****
59 WHITE(NI,59)1-Q(I)-V(I)
60 FOMAT(20,15,5X,F20.4,5X,'20.4)
60 CONTINUE
C*****
C CALCULO DAS REACOES DE APOIO DE UMA ESTRUTURA TRELICADA
C*****
DO 70 I=1,N
  ISINA=-1
  DO 70 JJ=1,ACN
    ISINA=-ISINA
    K=0
65 K=K+1
    IF(K-CT-NDF)GO TO 70
    J=NDF+(NDF(I,JJ)-1)*K
    IF(RL(J).EQ.0)GO TO 65
    IF(K-2)66,67,68
66 C=XCL(I)
    GO TO 69
67 C=YCL(I)
    GO TO 69
68 C=ZCL(I)
69 AR(J)=AR(J)-(Q(I)*C*ISINA)/L(I)
    GO TO 65
70 CONTINUE
71 WHITE(NI,74)
74 FOMAT(//,30X,'REACOES EXTERNAS',//,20X,'NO',15X,'RX',15X,'RY',15X
1,'RZ')
    DO 77 J=1,NJ
    DO 76 K=1,NDF
    IF(RL(NDF*(J-1)+K).EQ.0)GO TO 76
    WRITE(NI,75)J,(AR(NDF*(J-1)+KK),KK=1,NDF)
75 FOMAT(1X,15,6X,3F15.4)
    GO TO 77
76 CONTINUE
77 CONTINUE
GO TO 1000
C*****
C CALCULO DAS SOLICITACOES NOS ELEMENTOS E REACOES DE APOIO PARA
C*** UM PORTICO PLANO
670 CALL SOLRE(NJ,AR,RL,NR)
GO TO 1000
C*****
C CALCULO DAS DEFORMACOES E TENSOES NOS ELEMENTOS FINITOS TRIANGULA-
C*** RES
680 CALL CDTCS(POIS,E,DJ,NOP)
GO TO 1000
690 CALL CDTLS(PCIS,E,DJ,NOP)
1000 RETURN
END

```

C  
 C  
 C

```

SUBROUTINE SOLRE(NJ,AR,RL,NR)
*****
CALCULA AS SOLICITACOES NAS EXTREMIDADES DOS ELEMENTOS
E AS REACOES DE APOIO DA ESTRUTURA DE PORTICO PLANO
*****
DIMENSION SMR(6,6),AMD(6),DJ(150),AML(100,6),AR(NR),R(100,3,3),
1SM(6,6)
COMMON/AC/NJ,NL,N,N,N2,IG,MCN,NDF,ITE
COMMON/A1/SM,R
COMMON/A2/AML,DJ
INTEGER RL(K2)
WRITE(NI,50)
50 FOMAT(//,40X,'SOLICITACOES NAS EXTREMIDADES DOS ELEMENTOS',//
1,37X,'NO INICIAL',28X,'NO FINAL',//,10X,'ELEMENTO',3X,2(6X,'FORÇA
2X',6X,'FORÇA Y',4X,'MOMENTO Z'))
DO 1600 I=1,N
  READ(IG,1)SMR,J1,J2,J3,K1,K2,K3
  DO 1500 J=1,6
    AMD(J)=SMR(J,1)*DJ(J1)+SMR(J,2)*DJ(J2)+SMR(J,3)*DJ(J3)+SMR(J,4)*DJ
1(K1)+SMR(J,5)*DJ(K2)+SMR(J,6)*DJ(K3)
1500 CONTINUE
  WRITE(NI,51)I,((AML(I,J)+AMD(J)),J=1,6)
51 FOMAT(//,13X,13,5X,6(F10.4,3X))
  IF(RL(J1).NE.1)GO TO 550
  AR(J1)=AR(J1)+R(I,1,1)*AMD(1)+R(I,2,1)*AMD(2)+R(I,3,1)*AMD(3)
550 IF(RL(J2).NE.1)GO TO 551
  AR(J2)=AR(J2)+R(I,1,2)*AMD(1)+R(I,2,2)*AMD(2)+R(I,3,2)*AMD(3)
551 IF(RL(J3).NE.1)GO TO 552
  AR(J3)=AR(J3)+R(I,1,3)*AMD(1)+R(I,2,3)*AMD(2)+R(I,3,3)*AMD(3)
552 IF(RL(K1).NE.1)GO TO 553
  AR(K1)=AR(K1)+R(I,1,1)*AMD(4)+R(I,2,1)*AMD(5)+R(I,3,1)*AMD(6)
553 IF(RL(K2).NE.1)GO TO 554
  AR(K2)=AR(K2)+R(I,1,2)*AMD(4)+R(I,2,2)*AMD(5)+R(I,3,2)*AMD(6)
554 IF(RL(K3).NE.1)GO TO 1000
  AR(K3)=AR(K3)+R(I,1,3)*AMD(4)+R(I,2,3)*AMD(5)+R(I,3,3)*AMD(6)
1600 CONTINUE
  WRITE(NI,52)
52 FOMAT(//,40X,'REACOES DE APOIO',//,10X,'NO',7X,'REACAC X REAC
1AO Y MMENTO Z')
  DO 1601 J=1,NJ
  IF(RL(3*J-2).EQ.0.AND.RL(3*J-1).EQ.0.AND.RL(3*J).EQ.0)GO TO 1601
  WRITE(NI,53)J,AR(3*J-2),AR(3*J-1),AR(3*J)
53 FOMAT(//,10X,13,5X,3(F10.4,3X))
1601 CONTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE COTCST(POIS,E,DJ,NOP)
C*****
C     ESTA SUBROTINA CALCULA AS DEFORMACOES E TENSOES NOS ELEMENTOS
C     TRIANGULARES PARA O ESTADO PLANO DE TENSÃO OU DEFORMAÇÃO.
C     D=DEFORMACOES;T=TENSOES.
C*****
COMMON/AO/NI,NL,M,N,N2,IG,4CN,NDF,ITE
DIMENSION POIS(M),E(M),JCN2),D(3),T(3),EE(3,3),B(3,6),NOP(M,NCN)
WRITE(NI,50)
50 FORMAT(/,20X,'DEFORMACOES E TENSOES NOS ELEMENTOS',/,20X,'ELEMENT
10',10X,'DEFORMAÇÃO X = SIGHA X',5X,'DEFORMAÇÃO Y = SIGHA Y',5X,'
20DEFORMAÇÃO XY = TAU XY',/)
DO 100 I=1,M
  READ(IG,I)B
  DO 1 J=1,3
    Q(J)=0
    T(J)=0
  DO 1 K=1,3
    1 EE(J,K)=0.
    C=E(I)/(1.-POIS(I)*POIS(I))
    EE(1,1)=C
    EE(2,2)=C
    EE(1,2)=C*POIS(I)
    EE(2,1)=C*POIS(I)
    EE(3,3)=C*(1.-POIS(I))/2.
    K=0
    DO 35 KK=1,NDF
      DO 35 JJ=1,NCN
        K=K+1
        J=NDF*(NOP(I,JJ)-1)+KK
        DO 35 II=1,3
          35 D(II)=D(II)+B(II,K)*D(J)
        DO 40 II=1,3
          DO 40 K=1,3
            40 T(II)=T(II)+EE(II,K)*D(K)
        WRITE(NI,55)I,(D(II),T(II),II=1,3)
55 FORMAT(23X,I3,12X,6(E10.4,3X))
100 CONTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE COTLST(POIS,E,DJ,NOP)
C*****
C     ESTA SUBROTINA CALCULA AS DEFORMACOES E TENSOES NOS
C     ELEMENTOS FINITOS TRIANGULARES LST.
C     D=DEFORMACOES;T=TENSOES
C*****
COMMON/AO/NI,NL,M,N,N2,IG,4CN,NDF,ITE
DIMENSION POIS(M),E(M),JCN2),D(3),T(3),EE(3,3),B(3,12),
1FI(3,5),DELTA(3),DELTA(3),NOP(M,NCN)
WRITE(NI,50)
50 FORMAT(/,20X,'DEFORMACOES E TENSOES NOS ELEMENTOS',/,20X,'ELEMENT
10',10X,'DEFORMAÇÃO X = SIGHA X',5X,'DEFORMAÇÃO Y = SIGHA Y',5X,'
20DEFORMAÇÃO XY = TAU XY',/)
DO 100 I=1,M
  READ(IG,I)B,ETA,DELTA,AREA
  DO 1 J=1,3
    DO 1 K=1,3
      1 EE(J,K)=0.
      C=E(I)/(1.-POIS(I)*POIS(I))
      EE(1,1)=C
      EE(2,2)=C
      EE(1,2)=C*POIS(I)
      EE(2,1)=C*POIS(I)
      EE(3,3)=C*(1.-POIS(I))/2.
      KKK=0
20 KKK=KKK+1
  GO TO (21,22,23,24,25,26),KKK
21 CALL FILST(1.,0.,0.,1)
  GO TO 27
22 CALL FILST(0.,1.,0.,FI)
  GO TO 27
23 CALL FILST(0.,0.,1.,FI)
  GO TO 27
24 CALL FILST(0.5,0.5,0.,FI)
  GO TO 27
25 CALL FILST(0.,0.5,0.5,FI)
  GO TO 27
26 CALL FILST(0.5,0.,0.5,FI)
27 C1=1./(2*AREA)
  DO 20 J=1,3
    T(J)=0.
    D(J)=0.
  DO 25 K=1,12
    B(J,K)=DELTA(J)*FI(J,K)+C1*B(1,K)
    B(3,K)=DELTA(J)*FI(J,K)+C1*B(3,K)
    B(2,K)=DELTA(J)*FI(J,K)+C1*B(2,K)
    B(3,K)=DELTA(J)*FI(J,K)+C1*B(3,K)
30 B(3,K)=DELTA(J)*FI(J,K)+C1*B(3,K)
    K=0
  DO 35 KK=1,NDF
    DO 35 JJ=1,NCN
      K=K+1
      J=NDF*(NOP(I,JJ)-1)+KK
      DO 35 II=1,3
        35 D(II)=D(II)+B(II,K)*D(J)
      DO 40 II=1,3
        DO 40 K=1,3
          40 T(II)=T(II)+EE(II,K)*D(K)
        WRITE(NI,55)I,(D(II),T(II),II=1,3)
55 FORMAT(23X,I3,12X,6(E10.4,3X))
  IF(KKK.NE.0)GO TO 20
100 CONTINUE
RETURN
END

```

```

COMMON/AG/NI,NL,M,N,N2,IG,MCN,NDF,ITE
COMMON/1/SP,R,SHR
COMMON/2/AML,DJ
COMMON/3/LML
COMMON/4/ASE
COMMON/5/ASE(15000),L1(15000),L2(300),SC(15000),NLI(15000),ITE(300)
DIMENSICA X(100),Y(100),Z(100),NUP(100,6),AC(100),EC(100),
1 IY1(300),OFS(20),V(100),M(200),IND(300),RC(100,3,3),AC(300),
2 AE(100),SM(6,6),SM(6,6),LML(100),AML(100,6),JJ(300),AC(300),
3 IY2(300),MAXH(300),UC(7500),IDTAG(300),PUIS(100),ESP(100)
REAL NPIC,IZ(100)
INTEGER RL(300),CRL(300)
N1=5
IG=11
NL=8
C*****
C ESTE PROGRAMA, COMO ESTA DIMENSIONADO, PODEMOS CALCULAR ESTRUTURAS
C CUA FAMILIA OCORRE ATÉ 15000 POSICOES, OU SEJA, APROXIMADAMENTE
C DENTRO DOS SEQUENTES LIMITES: 100 ELEMENTOS - 100 NOS (NOS M DEVE
C SER MAIOR OU IGUAL A N). PARA A TECNICA DE ESPARSIDADE DO BANDA
C VARIÁVEL PLANO, QUE A LARGURA DO BANDA MÉDIA MÁXIMA É:
C TRIANGULAR ESPACIAL...150*PORTICL PLANO OU CST... 500*60
C ELÉMENTO E LARG.BANDA.MED.MAX.=40*PORTICL...40 ELEMENTOS E LARG.BAN.
C MED.MAX.=40*60=2400 ELEMENTOS E LARG.BANDA.MED.MAX=553. PARA A
C MONTAGEM DA MATRIZ TODA, TEMOS (NÚMERO DE NÓS*NÚMERO DE ELEMENTOS)
C MÁXIMO=TRELICA PLANA...7500*TRELICA ESPACIAL...5000*PORTICL PLANO
C ...1666
C*****
C IMPRESSAO DO TITULO.
C*****
C WRITE(I,1)
1 FORMAT(2(32X,64(' ')),/,32X,*,*,*,60X,*,*,*,/,32X,*,*,*,5X,*,PROGRAMA
1 PARA ANALISE DE ESTRUTURAS',20X,*,*,*,/,32X,*,*,*,60X,*,*,*,/,32X,*,*,*,
2',52,*,DIRECCAO CINETA DA MATRIZ DE RIGIDEZ FATORADA',10X,*,*,*,/,32
3X,*,*,*,/,32X,*,*,*,5X,*,TRIANGULARIZACAO PELO METODO DE HOU
4SEHOLDER OU DE',6X,*,*,*,/,32X,*,*,*,60X,*,*,*,/,32X,*,*,*,5X,*,GRAM-SC
5HOLD', EPRGEC DE TECNICAS DE ESPARSIDADE',14,*,*,*,/,32X,*,*,*,60X
6',*,6X,*,*,*,/,32X,*,*,*,5X,*,TESE DE MESTRADO EM ENGENHARIA CIVIL',4
7',*,6X,*,*,*,/,32X,*,*,*,5X,*,TESE DE MESTRADO EM ENGENHARIA CIVIL',4
8A COPPE-URFJ',5X,*,*,*,/,32X,*,*,*,60X,*,*,*,/,32X,*,*,*,5X,*,AUTOR: CA
9RLOS LEOPOLDO MARTINS PRATES',18X,*,*,*,/,32X,*,*,*,60X,*,*,*,/,32X,*,*,*,
*,*,5X,*,CRIFATADOR:HUMBERTO LIMA SURIANO',23X,*,*,*,/,32X,*,*,*,60X
*,*,*,/,2(32X,64(' ')),/,1111111)
C*****
C READ(I,1)NFSTR
WRITE(I,2)NCSTR
2 FORMAT(//,40X,*,NÚMERO DE ESTRUTURAS A SEREM CALCULADAS=',15,////)
DO 99 IFSTR=1,NFSTR
TEMP=TIME(2)
C*****
C ITEC=TECNICA DE ARMAZENAMENTO (OPCIONAL):1=RETANGULAR(DISPONIVEL
C PARA TODOS OS TIPOS DE ELEMENTO COM EXCECAO DO ELEMENTO FINITO
C TRIANGULAR);2=ESPARSIDADE DO BANDA VARIÁVEL(CAPENAS PARA AS TRELICAS
C NJ=NÚMERO DE NÓS, NR=NÚMERO DE ELEMENTOS, NR=DIRECOES RESTRINGIDAS
C NL=NÚMERO DE NÓS POR ELEMENTO
C NC=NÚMERO DE NÓS POR ELEMENTO
C NDF=NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE POR NÓ.
C NR=NÚMERO DE NÓS QUE TEM PELO MENOS UMA DIRECCAO RESTRINGIDA
C NPEQ=NÚMERO DE NÓS PEQUENOS. ITE=TIPO DE ESTRUTURA :1=TRELICA PLANA;
C 2=TRELICA ESPACIAL;3=PORTICL PLANO
C ITE=4=ELEMENTO FINITO TRIANGULAR CST-ESTADO PLANO DE DEFORMACOES.
C ITE=5=ELEMENTO FINITO TRIANGULAR CST-ESTADO PLANO DE TENSOES.
C ITE=6=ELEMENTO FINITO TRIANGULAR LST-ESTADO PLANO DE DEFORMACOES.
C ITE=7=ELEMENTO FINITO TRIANGULAR LST-ESTADO PLANO DE TENSOES.
C ICOND=1 SIGNIFICA QUE SE DESEJA CALCULAR O NÚMERO DE CONDICIONA-
C MENTO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA
C N= NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE DO SISTEMA
C*****
C LEITURA DOS DADOS DE CADA PROBLEMA
C READ(I,3)IFS
3 FORMAT(20A4)
WRITE(I,4)DOES
4 FORMAT(1H1,10X,*,*,OBS *,*,(//,10X,20A4))
READ(I,5)NJ,N,NR,NLI,ITEC ,NRJ,NPEQ,ITE,ICOND
NCN=2
IF(ITE.FC.4.CR.ITE.EQ.5)NCN=3
IF(ITE.GL.6)NCN=6
GO TO (30,31,31,30,30,30,30),ITE
30 NDF=2
GO TO 39
31 NDF=3
39 N2=NDF+NJ
WRITE(I,5)ITE,ITEC,NPEQ,NJ,N,NR,NCN,NDF
6 FORMAT(//,5X,*,TIPO DE ESTRUTURA:1=TRELICA PLANA;2=TRELICA ESPACIA
1L;3=PORTICL PLANO;4=ELEMENTO FINITO TRIANGULAR;5=EST. PL. TENSOES;6=EST. PL.
2TENSOES;7=ELEMENTO FINITO TRIANGULAR LST;LST.FC.,/,10X,*,TIPO DE DEFORMACOES
37=ELEMENTO FINITO TRIANGULAR LST;LST.FC.,/,10X,*,TIPO DE DEFORMACOES
4E DE TENSOES RESPECTIVAMENTE',/,20X,*,TIPO UTILIZADO:',15,/,5X,*,TE
5CNICA DE ARMAZENAMENTO:1=MATRIZ COMPLETA;2=TRIANGULARIZACAO POR HOU
6SEHOLDER;3=ESPARSIDADE;4=TRIANGULARIZACAO POR GRAM-SCHMIDT',/,10X,
7',3'BANDA VARIÁVEL(CASEHOLDER)---TIPO UTILIZADO:',15,/,20X,*,NÚMERO
8PEQUENO:',15,/,2,/,20X,*,NÚM. DE NÓS:',15,/,20X,*,NÚMERO DE ELEMENTOS
9',15,/,20X,*,NÚMERO DE DIRECOES RESTRINGIDAS:',15,/,20X,*,NÚMERO DE
0E NÓS POR ELEMENTO:',15,/,20X,*,NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE POR NÓ
1',15,/,)
N2=NR
NM=N
IF(ITE.GE.3)NM=3*M
IF(ITE.GE.4)NM=9*M
IF(NM.GE.4)NGO TO 40
WRITE(I,5)
5 FORMAT(//,20X,*,O PROBLEMA NAO PODE SER RESOLVIDO PORQUE M E MENOR
1QUE N')
GO TO 99
40 CALL LER (F,AX,RL,CRL,NJ,X,Y, NCP,NR,NRJ,NLI,AR,Z,IZ,A
1,AC,POIS,ESP)
WRITE(I,2222)(TIME(2)-TEMP)/60.
2222 FORMAT(//,20X,*,TEMPO(SEG.) GASTO NA LEITURA(OU GERACAO) DOS DADOS O
1J PROBLEMA=',15,1)
TEMP=TIME(2)
C*****
C MONTAGEM DA MATRIZ S DE ACORDO COM A TECNICA ESCOLHIDA
C*****
C IF(ITEC.EQ.2)GO TO 500
CALL MONTAG(F,AX,IZ,CRL,X,Y,Z,NCP,NJ,IND,ITEC,NPEQ,MA,LF,RL,AC,
1A,AR,AR)
WRITE(I,2223)(TIME(2)-TEMP)/60.
TEMP=TIME(2)
C*****
C CALCULO DO NÚMERO DE CONDICIONAMENTO DA MATRIZ DE RIGIDEZ
C*****
C IF(ICOND.NL.1)GO TO 400
CALL CONDIC
400 CONTINUE
C*****
C CALL TRIANG(CAL,IND,ITEC,V ,MA,LI)
WRITE(I,2224)(TIME(2)-TEMP)/60.
TEMP=TIME(2)
GO TO 600

```

```

500 CALL MONI SPCL, AX, IZ, CRL, X, Y, Z, NOP, NJ, RL, NPE, Q, AC, A, AR, IVT1,
1 IVP, POIS, I, SI, NR)
WRITE(NI, 2213) (TIME(2) - TEMP) / 60.
2223 FORMAT(//, 20X, 'TEMPO(SEG.) GASTO NA MONTAGEM DO FATOR S DO PROBLEMA
1 =', F5.1)
TEMP = TIME(2)
CALL AEC (MAXH, NOP, RL, CRL)
C*****
CALL TRISF(AC, NPE, MAXH, Q, IDIAG)
WRITE(NI, 2224) (TIME(2) - TEMP) / 60.
2224 FORMAT(//, 20X, 'TEMPO(SEG.) GASTO NO CALCULO DOS DESLOCAMENTOS NO
1 DADOS DO PROBLEMA =', F5.1)
TEMP = TIME(2)
C*****
C CALCULO DOS ESFORÇOS, TENSÕES E REACÇÕES
C*****
600 CALL RESCL(AC, NJ, AR, V, NR, RL, CRL, NOF, E, AX, POIS, ESP)
WRITE(NI, 2225) (TIME(2) - TEMP) / 60.
2225 FORMAT(//, 20X, 'TEMPO(SEG.) GASTO PARA ENCONTRAR AS FORÇAS, TENSÕES
1 E REACÇÕES DO PROBLEMA =', F5.1)
99 CONTINUE
STOP
END

```

## Cartões de dados

```

3
TESTE DA TECNICA DE BANDA VARIÁVEL
10,17,5,4,3 ,2,J,00000001,1,0
0
1,0,,0,,0.
2,43,,0,,0.
3,0,,30,,0.
4,40,,30,,0.
5,0,,60,,0.
6,40,,0,,0.
7,0,,70,,0.
8,40,,90,,0.
9,0,,120,,0.
10,40,,170,,0.
2,1,3,1,5,12000000.
2,1,4,3,0,12000000.
3,1,2,1,5,12000000.
4,2,4,1,5,12000000.
5,3,5,1,5,12000000.
6,3,6,3,0,12000000.
7,3,4,1,5,12000000.
8,4,6,1,5,12000000.
9,5,7,1,5,12000000.
10,5,8,3,0,12000000.
11,5,6,1,5,12000000.
12,6,8,1,5,12000000.
13,7,9,1,5,12000000.
14,7,10,3,0,12000000.
15,7,8,1,5,12000000.
16,3,10,1,5,12000000.
17,9,10,1,5,12000000.
1,1,1
2,1,1
10,300,,0.
8,225,,0.
6,150,,0.
4,75,,0.
FUNIONAMENTO DO DIAFRAGMA NUM EDIFICIO COM CANGA DE VENTO
8,9,6,6,1 ,2,J,3,1
0
1,0,,0,,0.
3,0,,1000,,0.
5,0,,2000,,0.
7,0,,3000,,0.
2,2000,,0,,0.
4,2000,,1000,,0.
6,2000,,7000,,0.
8,2000,,3000,,0.
1,1,3,991,,2100,,750000.
2,1,4,991,,2100,,750000.
3,1,5,991,,2100,,750000.
4,1,6,991,,2100,,750000.
5,1,7,991,,2100,,750000.
6,1,8,991,,2100,,750000.
7,1,9,500000,,2100,,750000.
8,1,8,500000,,2100,,750000.
9,1,8,500000,,2100,,750000.
1,1,1,1
2,1,1,1
0
3 0.96
4 0.69
5 1.18
6 0.85
7 0.69
8 0.5
EXEMPLO DA TESE - ESTADO PLANO DE TENSÕES.
6,4,4,2,2,2,0.00000001,5,0
1
0,0
50,,20,,3,2,0,0,0,0,0,0.25,1,,210000.
1,1,1
2,1,1
5,1500,,0.
6,1500,,0.

```

```

*****
**
** PROGRAMA PARA ANALISE DE ESTRUTURAS
**
** OBTENCAO DIRETA DA MATRIZ DE RIGIDEZ FATORADA
**
** TRIANGULARIZACAO PELO METODO DE HOUSEHOLDER OU DE
**
** GRAM-SCHMIDT, EMPREGO DE TECNICAS DE ESPARSIDADE
**
** E DE BANDA NO ARMAZENAMENTO
**
** TESTE DE MESTRADO EM ENGENHARIA CIVIL NA COPPE-UFRJ
**
** AUTOR: CARLOS LEOPOLDO MARTINS PRATES
**
** ORIENTADOR: HUMBERTO LIMA SORIANO
**
*****

```

NUMERO DE ESTRUTURAS A SEREM CALCULADAS= 3

\*\* OBS \*\*

TESTE DA TECNICA DE BANDA VARIÁVEL

TIPO DE ESTRUTURA :1=TRELIÇA PLANA;2=TRELIÇA ESPACIAL;3=PORTICO PLANO;4=ELEMENTO FINITO TRIANGULAR,EST.PL.DEFORMACOES,CST;5=ELEMENTO FINITO TRIANGULAR,EST.PL.TENSORES,CST;6 E 7=ELEMENTO FINITO TRIANGULAR LST, EST.PL. DE DEFORMACOES E DE TENSORES RESPECTIVAMENTE

TIPO UTILIZADO= 1

TECNICA DE ARMAZENAMENTO:1=MATRIZ COMPLETA(TRIANGULARIZACAO POR HOUSEHOLDER);2=ESPARSIDADE(TRIANGULARIZACAO POR GRAM-SCHMID

3=BANDA VARIÁVEL(HOUSEHOLDER)---TIPO UTILIZADO= 3

NUMERO PEQUENO= .10E-07

NUM.DE NOS= 10

NUMERO DE ELEMENTOS= 17

NUMERO DE DIRECOES RESTRINGIDAS= 3

NUMERO DE NOS POR ELEMENTO= 2

NUMERO DE GRAUS DE LIBERDADE POR NO= 2

\*\*\*\*\*

NO	COORDX	COORDY	COORDZ
1	0.0000	0.0000	0.0000
2	40.0000	0.0000	0.0000
3	0.0000	30.0000	0.0000
4	40.0000	30.0000	0.0000
5	0.0000	60.0000	0.0000
6	40.0000	60.0000	0.0000
7	0.0000	90.0000	0.0000
8	40.0000	90.0000	0.0000
9	0.0000	120.0000	0.0000
10	40.0000	120.0000	0.0000

ELEMENTO	INCIDENCIA	AX(ESP)	E	IZ(OU COEF.POIS.)
1	1	3	1.5000	12000000.000
2	1	4	3.0000	12000000.000
3	1	2	1.5000	12000000.000
4	2	4	1.5000	12000000.000
5	3	5	1.5000	12000000.000
6	3	6	3.0000	12000000.000
7	3	4	1.5000	12000000.000
8	4	6	1.5000	12000000.000
9	5	7	1.5000	12000000.000
10	5	8	3.0000	12000000.000
11	5	6	1.5000	12000000.000
12	6	8	1.5000	12000000.000
13	7	9	1.5000	12000000.000
14	7	10	3.0000	12000000.000
15	7	8	1.5000	12000000.000
16	8	10	1.5000	12000000.000
17	9	10	1.5000	12000000.000

RESTRICOES NODAIS

NO	X	Y	Z
1	1	1	1
2	0	1	1

NO	CARGA X	CARGA Y	CARGA Z
10	300.0000	0.0000	
8	225.0000	0.0000	
6	150.0000	0.0000	
4	75.0000	0.0000	

TEMPO(SEG.) GASTO NA LEITURA(OU GERACAO) DOS DADOS DO PROBLEMA= 0.4

MA= 7

LF= 8

TEMPO(SEG.) GASTO NA MONTAGEM DO FATOR S DO PROBLEMA= 0.5

TEMPO(SEG.) GASTO NO CALCULO DOS DESLOCAMENTOS NODAIS DO PROBLEMA= 0.4

## DESLOCAMENTOS NODAIS

NO	D1	D2	D3
2	0.	0.	
3	.52369792E-02	.18750000E-02	
4	.37369792E-02	-.28125000E-02	
5	.12790365E-01	.29062500E-02	
6	.11623698E-01	-.46875000E-02	
7	.21065104E-01	.32812500E-02	
8	.20398438E-01	-.57187500E-02	
9	.28747396E-01	.32812500E-02	
10	.28747396E-01	-.60937500E-02	

BARRA	FORÇA	TENSAO
1	1125.0000	750.0000
2	937.5000	312.5000
3	0.0000	0.0000
4	-1687.5000	-1125.0000
5	618.7500	412.5000
6	843.7500	281.2500
7	-675.0000	-450.0000
8	-1125.0000	-750.0000
9	225.0000	150.0000
10	656.2500	218.7500
11	-525.0000	-350.0000
12	-618.7500	-412.5000
13	0.0000	0.0000
14	375.0000	125.0000
15	-300.0000	-200.0000
16	-225.0000	-150.0000
17	-0.0000	-0.0000

## REAÇÕES EXTERNAS

NO	RX	RY	RZ
1	-750.0000	-1687.5000	
2	0.0000	1687.5000	

TEMPO(SEG.) GASTO PARA ENCONTRAR AS FORÇAS, TENSOES E REACOES DO PROBLEMA= 0.2

\*\* OBS \*\*

## FUNCIONAMENTO DO DIAFRAGMA NUM EDIFICIO COM CARGA DE VENTO

TIPO DE ESTRUTURA :1=TRELICA PLANA;2=TRELICA ESPACIAL;3=PORTICO PLANO;4=ELEMENTO FINITO TRIANGULAR,EST,PL,DEFORMACOES,CST;  
5=ELEMENTO FINITO TRIANGULAR,EST,PL,TENSOES,CST;6 E 7=ELEMENTO FINITO TRIANGULAR LST, EST,PL.

DE DEFORMACOES E DE TENSOES RESPECTIVAMENTE

TIPO UTILIZADO= 3

TECNICA DE ARMAZENAMENTO:1=MAIRIZ COMPLETA(TRIANGULARIZACAO POR HOUSEHOLDER);2=ESPARSIDADE(TRIANGULARIZACAO POR GRAH-SCHMIDT)

3=BANDA VARIÁVEL(HOUSEHOLDER)---TIPO UTILIZADO= 1

NUMERO PEQUENO= 0.

NUM.DE NOS= 8

NUMERO DE ELEMENTOS= 9

NUMERO DE DIRECOES RESTRINGIDAS= 6

NUMERO DE NOS POR ELEMENTO= 2

NUMERO DE GRAUS DE LIBERDADE POR NO= 3

NO	COORDX	COORDY	COORDZ
1	0.0000	0.0000	0.0000
2	2000.0000	0.0000	0.0000
3	0.0000	1000.0000	0.0000
4	2000.0000	1000.0000	0.0000
5	0.0000	2000.0000	0.0000
6	2000.0000	2000.0000	0.0000
7	0.0000	3000.0000	0.0000
8	2000.0000	3000.0000	0.0000

ELEMENTO	INCIDENCIA		AX(ESP)	E	IZ(OU COEF.POIS.)
1	1	3	991.0000	2100.000	750000.0000
2	2	4	991.0000	2100.000	750000.0000
3	3	5	991.0000	2100.000	750000.0000
4	3	4	500000.0000	2100.000	0.0000
5	4	6	991.0000	2100.000	750000.0000
6	5	7	991.0000	2100.000	750000.0000
7	5	6	500000.0000	2100.000	0.0000
8	6	8	991.0000	2100.000	750000.0000
9	7	8	500000.0000	2100.000	0.0000

## RESTRICOES NODAIS

NO	X	Y	Z
1	1	1	1
2	1	1	1

NUMERO DE NOS CARREGADOS 6

NUMERO DE MEMBROS CUJAS CARGAS FORAM SUBSTITUIDAS PELAS ACOES DE ENCASTAMENTO PERFEITO EM SEUS EXTREMOS

NUMERO DE MEMBROS COM CARREGAMENTOS NAO SUBSTITUIDOS POR ACOES DE ENCASTAMENTO PERFEITO EM SEUS EXTREMOS

## ACOES APLICADAS EM CADA NO

NO	A1	A2	A3
3	0.960	0.000	0.000
4	0.690	0.000	0.000
5	1.180	0.000	0.000
6	0.850	0.000	0.000
7	0.690	0.000	0.000
8	0.500	0.000	0.000

TEMPO(SEG.) GASTO NA LEITURA(OU GERACAO) DOS DADOS DO PROBLEMA= 0.4

TEMPO(SEG.) GASTO NA MONTAGEM DO FATOR 5 DO PROBLEMA= 0.2

NORMA DA MATRIZ DE RIGIDEZ= .220711E+01

NORMA DA INVERSA= .501608E+07

NUMERO DE CONDICIONAMENTO DA MATRIZ DE RIGIDEZ = .110710E+08

TEMPO(SEG.) GASTO NO CALCULO DOS DESLOCAMENTOS NODAIS DO PROBLEMA= 4.3

## DESLOCAMENTOS NODAIS

NO	D1	D2	D3
3	.12153440E+01	-.32425374E-09	-.21730160E-02
4	.12153438E+01	-.40503188E-09	-.21730157E-02
5	.39179896E+01	-.71149260E-09	-.30619047E-02
6	.39179893E+01	-.81056738E-09	-.30619048E-02
7	.71058202E+01	-.67854902E-09	-.32507936E-02
8	.71058200E+01	-.85070321E-09	-.32507937E-02

## SOLICITACOES NAS EXTREMIDADES DOS ELEMENTOS

ELEMENTO	NO INICIAL			NO FINAL		
	FORCA X	FORCA Y	MOMENTO Z	FORCA X	FORCA Y	MOMENTO Z
1	0.0000	-2.4350	-4640.0008	-0.0000	2.4350	2204.9996
2	0.0000	-2.4350	-4639.9992	-0.0000	2.4350	2205.0004
3	0.0000	-1.6100	-2204.9996	-0.0000	1.6100	594.9999
4	0.1350	0.0000	0.0000	-0.1350	0.0000	0.0000
5	0.0000	-1.6100	-2205.0004	-0.0000	1.6100	595.0001
6	-0.0000	-0.5950	-594.9999	0.0000	0.5950	0.0000
7	0.1650	0.0000	0.0000	-0.1650	0.0000	0.0000
8	0.0000	-0.5950	-595.0001	-0.0000	0.5950	-0.0000
9	0.0950	0.0000	0.0000	-0.0950	0.0000	0.0000

## REACOES DE APOIO

NO	REACAO X	REACAO Y	MOMENTO Z
1	-2.4350	0.0000	-4640.0008
2	-2.4350	0.0000	4639.9992

TEMPO(SEG.) GASTO PARA ENCONTRAR AS FORCAS, TENSOES E REACOES DO PROBLEMA= 0.2



\*\* DHS \*\*

## EXEMPLO DA TESE - ESTADO PLANO DE TENSOES.

TIPO DE ESTRUTURA :1=TRELICA PLANA;2=TRELICA ESPACIAL;3=PORTICO PLANO;4=ELEMENTO FINITO TRIANGULAR,EST.PL.DEFORMACOES,CST;  
 5=ELEMENTO FINITO TRIANGULAR ,EST.PL.TENSOES,CST;6 E 7=ELEMENTO FINITO TRIANGULAR LST, EST.PL.  
 DE DEFORMACOES E DE TENSOES RESPECTIVAMENTE  
 TIPO UTILIZADO= 5  
 TECNICA DE ARMAZENAMENTO:1=MATRIZ COMPLETA(TRIANGULARIZACAO POR HOUSEHOLDER);2=ESPARSIDADE(TRIANGULARIZACAO POR GRAM-SCHMIDT  
 3=BANDA VARIÁVEL(HOUSEHOLDER)---TIPO UTILIZADO= 2  
 NUMERO PEQUENO= .10E-07  
 NUM.DE NOS= 6  
 NUMERO DE ELEMENTOS= 4  
 NUMERO DE DIRECOES RESTRINGIDAS= 4  
 NUMERO DE NOS POR ELEMENTO= 3  
 NUMERO DE GRAUS DE LIBERDADE POR NO= 2

```

*****
NO          COORDX          COORDY          COORDZ
1           0.0000          0.0000          0.0000
2           0.0000          20.0000          0.0000
3           50.0000          0.0000          0.0000
4           50.0000          20.0000          0.0000
5           100.0000         0.0000          0.0000
6           100.0000         20.0000          0.0000

```

```

ELEMENTO    INCIDENCIA      AX(ESP)      E      IZ(OU COEF.POIS.)
1           1 3 2           1.0000      2100000.000      0.2500
2           3 4 2           1.0000      2100000.000      0.2500
3           3 5 4           1.0000      2100000.000      0.2500
4           5 6 4           1.0000      2100000.000      0.2500

```

## RESTRICOES NODAIS

```

NO      X      Y      Z
1       1       1
2       1       1

```

```

NO      CARGA X      CARGA Y      CARGA Z
5       1500.0000      0.0000
6       1500.0000      0.0000

```

TEMPO(SEG.) GASTO NA LEITURA(OU GERACAO) DOS DADOS DO PROBLEMA= 0.2

TEMPO(SEG.) GASTO NA MONTAGEM DO FATOR S DO PROBLEMA= 0.1

J= 1 INDICE DE NAO NULOS= 46.88

J= 6 INDICE DE NAO NULOS= 59.58

PORCENTAGEM DOS COEFICIENTES DE U ARMAZENADOS=50.00  
 PORCENTAGEM DE NAO NULOS DOS COEFICIENTES DE U ARMAZENADOS=96.00

TEMPO(SEG.) GASTO NO CALCULO DOS DESLOCAMENTOS NODAIS DO PROBLEMA= 0.2

## DESLOCAMENTOS NODAIS

```

NO      D1      D2      D3
3       .33763343E-02      -.29994709E-04
4       .35429716E-02      -.38659848E-03
5       .69474683E-02      -.44663310E-03
6       .71143568E-02      -.80377433E-03

```

## DEFORMACOES E TENSOES NOS ELEMENTOS

```

ELEMENTO    DEFORMACAO X= SIGMA X    DEFORMACAO Y = SIGMA Y    DEFORMACAO XY = TAU XY
1           .6753E-04      .1513E+03      0.      .3791E+02      -.5999E-06      -.5039E+00
2           .7066E-04      .1487E+03      -.1783E-04      -.2553E+00      .5949E-06      .5039E+00
3           .7142E-04      .1500E+03      -.1783E-04      .5702E-01      -.4041E-09      -.7545E-03
4           .7143E-04      .1500E+03      -.1786E-04      -.1638E-03      .4041E-09      .7545E-03

```

TEMPO(SEG.) GASTO PARA ENCONTRAR AS FORÇAS, TENSOES E REACOES DO PROBLEMA= 0.1